Osakappaleen dynaamisten ominaisuuksien tiivistäminen

Raportti BVAL35-001015

Paul Klinge

Espoo, 12.5.2000

VALMISTUSTEKNIIKKA

A	Työraportti	
B	Julkinen raportti	X
C	Luottamuksellinen raportti	

Raportin nimi Osakappaleen dynaamisten ominaisuuksien tiivistäminen	
Toimeksiantaja/rahoittaja ja tilaus TEKES/VÄRE/Pyörivast	Raportin numero BVAL35-001015
Projekti PVMODULI	Suoritteen numero V9SU00813
Laatija(t) Paul Klinge	Sivujen/liitesivujen lkm 24
Avainsanat osakappale, tiivistys, elementtimalli, substructure, condensation, reduction, FE model	

Tiivistelmä

Tässä kirjallisuusselvityksessä on käyty läpi erilaisia elementtimallin dynaamisia tiivistysmenetelmiä. Tässä yhteydessä keskityttiin alempiin taajuuksiin (alle 100 Hz), joissa laitteiden käyttäytymistä mallitetaan yleensä elementtimenetelmällä.

Valitettavasti useimpien esitysten yhteydessä on käytetty varsin pieniä ja yksinkertaisia esimerkkejä. Siten käytettävän menetelmän valinta vaatii vielä lupaavimpien menetelmien vertaamista suuremmalla ja realistisemmalla esimerkillä. Eri tyyppisistä menetelmistä voi kuitenkin sanoa seuraavaa:

Suorien tiivistysmenetelmien tulos on suoraan käytettävissä ilman jälkikäsittelyä. Useimmat kuvaavat liitoksen staattisen käyttäytymisen tarkasti. Dynaamisten ominaisuuksien parantamiseksi voidaan joutua ottamaan mukaan ylimääräisiä vapausasteita.

Värähtelymuotojen synteesi on koeteltu menetelmä, jonka tarkkuus ja toimivuus suurillakin malleilla tunnetaan. Periaatteessa moduliin tarvitaan vain liitos ja ominaismuotoja. Jos visualisointivapausasteetkin otetaan "liitokseen" mukaan, niin tulosta ei tarvitse laajentaa.

Taajuusvastemenetelmillä voidaan periaatteessa päästä todella suuriin tiivistyksiin, niiden teoreettisen tarkkuuden vuoksi. Niillä lasketaan suoraan vastetta. Jos ominaismuodot ja -taajuudet halutaan, on ne määritettävä erikseen. Taajuusvastemenetelmät sopivat suoraan yhteen mitatun datan kanssa.

Allekirjoitukset Espoossa 26.5.2000

Matti K. Hakala Tutkimuspäällikkö	Paul Klinge Erikoistutkija	 Tarkastanut

Jakelu:

VTT Valmistustekniikka, 3 kpl

VTT Valmistustekniikka Laiva- ja konetekniikka Tekniikantie 12 Espoo PL 1705 02044 VTT	Puhelin 09 4561 Fax 09 4550619 Sähköposti: paul.klinge@vtt.fi WWW: http://www.vtt.fi/val/

Sisällysluettelo

1 Johdanto

Tämä raportti liittyy TEKESin VÄRE teknologiaohjelman "Pyörivät koneet"-projektin "Vastemitoitus"-osaprojektiin. Siinä on yhtenä tavoitteena kehittää osista koottujen laitteiden vastelaskentaan menetelmä, jossa käytetään osien tiivistettyjä dynaamisia malleja.

Ajatuksena on määritellä erilaisille laitteille tiivistetty dynaaminen malli, jota voidaan käyttää suunnitteluun tarvittavissa laskelmissa, kun laite asennetaan perustalleen tai osaksi suurempaa laitekokonaisuutta. Tiivistetystä mallista on tarkoitus tehdä sellainen, että se voidaan muodostaa sekä laskennallisesti että mittausten avulla. Tätä dynaamista mallia voidaan käyttää myös laitteen dynaamisten vaatimusten esittämiseen alihankkijalle.

Tämän selvityksen tavoitteena on kartoittaa, minkälaisia dynaamisen mallin tiivistysmenetelmiä on olemassa ja mitkä niistä on mahdollista toteuttaa sekä laskennallisesti että mittauksin. Tässä yhteydessä keskitytään alempiin taajuuksiin (alle 100 Hz), joissa laitteiden käyttäytymistä mallitetaan yleensä elementtimenetelmällä.

2 Kirjallisuushaku

Tämä selvitys perustuu kirjallisuushakuun, jossa etsittiin maailmalta viimeisintä tietoa elementtimallin tiivistämisestä niin, että mallin dynaamiset ominaisuudet säilyvät mahdollisimman hyvin. Tietoa haettiin viimeiseltä kymmeneltä vuodelta, mutta lehtien sähköisten arkistojen osalta se tarkoittaa käytännössä niin pitkälle kuin vuosikertoja löytyi sähköisessä muodossa.

Haku käsitti kirjoittajan omat arkistot, VTT:n Laiva- ja konetekniikan oman kirjaston, VTT:n Tietopalvelun Elektroniset lehdet sekä COMPENDEX tietokannan. Kaikki lähteet haettiin läpi aihealueittain.

Useammanlaisia hakusanojen yhdistelmiä kokeilemalla päädyttiin käytännössä seuraaviin: tiivistämiseen liittyviä artikkeleita haettiin avainsanoilla "(condensation or reduction) and structure", taajuusvastemenetelmiin "FRF and structure", osarakennetekniikkaan "(dynamic or vibration) and (substructure or synthesis)" ja moduleihin "(dynamic or vibration) and module and structure not space".

Viitteet karsittiin ensin otsikkotasolla näytöllä. Yleensä myös tiivistelmä oli sähköisessä muodossa, jolloin sekin luettiin näytöltä. Riittävän kiinnostavista viitteistä tilattiin tai tulostettiin koko artikkeli, konferenssiesitelmä tai kirja. Karsinta vaiheessa ylimääräistä työtä aiheutti päällekkäisyys eri hauissa, kun samoja viitteitä tuli käytyä läpi moneen kertaan.

3 Rajaukset

Tässä selvityksessä keskityttiin menetelmiin, jotka tuottavat tiivistetyn jäykkyys- ja massamatriisin. On myös menetelmiä, jotka tuottavat matriiseita tai lisätermejä, jotka ovat ω^2:n funktiota. Yleensä sellaiset menetelmät esitetään sarjakehitelminä, joissa matriisien kertoimina ω^2:n lisäksi on $\omega^4, \omega^6 \ldots$. Koska ne vaativat erikoisratkaisijoita, ei näitä menetelmiä tässä yhteydessä tutkittu.

Tiivistysmenetelmiä kehitettäessä pyritään yleensä siihen, että tiivistetty tulos on laajennettavissa kaikkiin alkuperäisiin vapausasteisiin. Tässä yhteydessä pyritään tiivistettyyn malliin ns. "dynaamiseen moduliin", joka itsessään sisältää kaiken oleellisen. Se tarkoittaa myös visualisointiin tarvittavia vapausasteita, joten laajennuksella ei käytännössä ole merkitystä.

Tavoitteena on dynaaminen moduli, joka ei ole riippuvainen alkuperäisen elementtiverkon elementtijaosta. Käytännössä se tarkoittaa, että osakappaleen liitospinnan siirtymille asetetaan ylimääräisiä ehtoja. Ne voidaan käytännössä toteuttaa suoraan sidosyhtälöillä tai Lagrangen menettelyllä. Yleensä ehdot voidaan toteuttaa ennen tiivistämistä tai myös sen jälkeen. Joka tapauksessa ne ovat toteutettavissa ennen tiivistystä, joten ne eivät rajoita menetelmän valintaa eikä niitä tässä yhteydessä tämän enempää käsitellä.

4 Suorat tiivistysmenetelmät

Tiivistettäessä elementtimallia vapausasteet jaetaan kahteen osaan säilytettäviin (m=master, herra) ja eliminoitaviin (s=slave, orja).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_m \\ \boldsymbol{\varphi}_s \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_m \\ \boldsymbol{\varphi}_s \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

Eliminoitavat vapausasteet kuvataan säilyvien vapausasteiden avulla.

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{R}\mathbf{u}_m \qquad (2)$$

Muodollisesti elementtimallin tiivistäminen voidaan kuvata muunnoksella

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u}_m \quad \text{eli} \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_m \\ \mathbf{T}_s \end{bmatrix} \mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{u}_m \qquad (3)$$

jolla tiivistetty ominaisarvotehtävä muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{mm}\boldsymbol{\varphi}_m &= \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{mm}\boldsymbol{\varphi}_m \\ \tilde{\mathbf{K}}_{mm} &= \mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{K}_{mm} + \mathbf{R}^T\mathbf{K}_{sm} + \mathbf{K}_{ms}\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\mathbf{K}_{ss}\mathbf{R} \qquad (4) \\ \tilde{\mathbf{M}}_{mm} &= \mathbf{T}^T\mathbf{M}\mathbf{T} = \mathbf{M}_{mm} + \mathbf{R}^T\mathbf{M}_{sm} + \mathbf{M}_{ms}\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\mathbf{M}_{ss}\mathbf{R} \end{aligned}$$

Säilytettyjen vapausteiden määrästä ja sijainnista sekä ennen kaikkea laajennus/tiivistysmatriisin **R** hyvyydestä riippuu kuinka hyvin tiivistetystä ominaisarvotehtävästä (4) ratkaistut ominaismuodot ja -taajuudet vastaavat alkuperäisiä.

4.1 Staattinen tiivistys

Staattisessa tiivistyksessä [Guyan 1965] jäykkyysmatriisista eliminoidaan muut kuin säilytettävät vapausasteet. Tiivistysmatriisiksi tulee

$$\mathbf{R} = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \qquad (5)$$

jota sovelletaan myös massamatriisiin.

Staattinen tiivistys oli ensimmäinen laajasti käytetty tiivistysmenetelmä. Sen heikkoutena on kuitenkin se, että tiivistyksessä ei oteta eliminoitavien vapausasteiden massaa mitenkään huomioon. Tulos riippuu vahvasti säilytettävien vapausteiden määrästä ja jakautumasta. Valitsemalla säilytettävät vapausasteet oikein voidaan kuitenkin saada pari alinta ominaismuotoa kohtuullisen tarkasti.

4.2 Dynaaminen tiivistys

Dynaaminen tiivistys [esim. Friswell & al. 1995] on staattisen tiivistyksen yleistys. Massa saadaan mukaan tekemällä eliminaatio dynaamisella jäykkyysmatriisilla.

$$\mathbf{D}(\omega) = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \tag{6}$$

Koska dynaaminen jäykkyysmatriisi on ω^2:n funktio, tuloksena on tiivistetty malli, josta ominaismuodot ja -taajuudet saadaan määrättyä vain erikoismenettelyillä [Leung 1993, Bouhaddi & Fillod 1996]. Tietyllä taajuudella saadaan kuitenkin tiivistysmatriisiksi

$$\mathbf{R} = -\left(\mathbf{K}_{ss} - \omega_0^2 \mathbf{M}_{ss}\right)^{-1}\left(\mathbf{K}_{sm} - \omega_0^2 \mathbf{M}_{sm}\right) \tag{7}$$

Dynaaminen tiivistys on tarkka käytetyllä taajuudella. Siten se toimii hyvin, kun tutkitaan vain kapeaa taajuuskaistaa. Kauempana tiivistystaajuudesta käyttäytyminen on samanlaista kuin staattisella tiivistyksellä.

Erityisen hyvin dynaaminen tiivistys sopii mittaustuloksiin sovitetun elementtimallin laajentamiseen, koska mittaustulosten perusteella oikea taajuus tiedetään.

4.3 Parannettu staattinen tiivistys (IRS)

O'Callahan esittää parannetun version (IRS = Improved Reduced System) staattisesta tiivistyksestä [O'Callahan 1989]. Koska staattinen tiivistys ei mitenkään ota eliminoitujen vapausasteiden massaa huomioon, ideana on ikäänkuin jälkikäteen tarkistaa sen vaikutus. Kun näin saadut eliminoitujen vapausasteiden hitausvoimat otetaan huomioon säilytetyissä vapausasteissa, saadaan korjattu tiivistysmatriisi.

$$\mathbf{R} = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} + \mathbf{K}_{ss}^{-1}\left[\mathbf{M}_{sm} + \mathbf{M}_{ss}\left(-\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}\right)\right]\tilde{\mathbf{M}}_{mm}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}_{mm} \tag{8}$$

$\tilde{\mathbf{K}}_{mm}$ ja $\tilde{\mathbf{M}}_{mm}$ ovat staattisesti tiivistetyt jäykkyys- ja massamatriisi (kts. (5) ja (4)).

O'Callahan viittaa myös iteraation mahdollisuuteen. Parannetulla tiivistysmatriisilla saadaan tarkemmat tiivistetyt jäykkyys- ja massamatriisi. Sijoittamalla ne kaavaan (8) saadaan entistäkin parempi tiivistysmatriisi jne. (enemmän luvussa 4.5). Esimerkeissä iteraatiota ei kuitenkaan käytetty.

IRS ei ole niin herkkä säilytettävien vapausasteiden valinnalle kuin staattinen tiivistys, mutta valinta vaikuttaa selvästi tulokseen.

4.4 Parannettu dynaaminen tiivistys (DIRS)

Kuten edellä dynaamisen tiivistyksen yhteydessä (kts. luku 4.2) myös IRS:tä saadaan dynaaminen versio DIRS käyttämällä dynaamista jäykkyysmatriisia (6) normaalin jäykkyysmatriisin sijasta [Friswell & al. 1995]. Tiivistysmatriisin kaava on siis kaava (8), jossa **K** on korvattu **D**:llä. Jälleen tulos on tarkka käytetyllä tiivistystaajuudella.

4.5 Iteratiiviset tiivistysmenetelmät

Jo IRS:n yhteydessä (luku 4.3) O'Callahan [1989] viittasi iteraation mahdollisuuteen. Se on innostanut myös muita, mutta Friswell & al. [1995] ovat osoittaneet, että pelkästään tiivistettyjen jäykkyys- ja massamatriisin iteroiminen kaavassa (8) ei johda oikeaan lopputulokseen.

Alla on esitetty yleinen algoritmi dynaamisille tiivistysmenetelmille. Menetelmät eroavat toisistaan etupäässä vain tiivistysmatriisin **R** osalta ja siinä pyöritetäänkö iteraatioaskeleita 2, 3 tai 4 koko ajan vai vain joka n:s kierros.

Vaihe 1. Laske aloitus $\mathbf{R}_0$

Vaihe 2. Iteraatio luuppi

1. Laske uusi tiivistysmatriisi $\mathbf{R}_{k+1}$

2. Tiivistä jäykkyys- ja massamatriisit

$$\tilde{\mathbf{K}}_{k+1} = \mathbf{T}_{k+1}^{T}\mathbf{K}\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{K}_{mm} + \mathbf{R}_{k+1}^{T}\mathbf{K}_{sm} + \mathbf{K}_{ms}\mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{R}_{k+1}^{T}\mathbf{K}_{ss}\mathbf{R}_{k+1}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{k+1} = \mathbf{T}_{k+1}^{T}\mathbf{M}\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{M}_{mm} + \mathbf{R}_{k+1}^{T}\mathbf{M}_{sm} + \mathbf{M}_{ms}\mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{R}_{k+1}^{T}\mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}_{k+1}$$

3. Ratkaise tiivistetty ominaisarvotehtävä

$$\tilde{\mathbf{K}}_{k+1}\tilde{\mathbf{X}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{M}}_{k+1}\tilde{\mathbf{X}}_{k+1}\Lambda_{k+1}$$

4. Tarkista konvergenssi

$$\left|1 - \frac{\lambda_i^{(k)}}{\lambda_i^{(k+1)}}\right| < \text{tolerance}$$

Vaihe 3. Laajenna ominaismuodot

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{X}}$$

Algoritmi muistuttaa paljon aliavaruusiteraatiota ja tuottaa tiivistettyjen matriisien lisäksi ominaismuodot ja -taajuudet. Siten iteraatiota voidaan jatkaa esim. kunnes alle 100 Hz ominaistaajuudet ovat vakiintuneet.

4.5.1 Iteratiivinen IRS

Iteratiivinen IRS menetelmä [Friswell & al. 1995] muodostaa uuden tiivistysmatriisin kaavalla

$$\mathbf{R}_{k+1} = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} + \mathbf{K}_{ss}^{-1}\left(\mathbf{M}_{sm} + \mathbf{M}_{ss}\mathbf{R}_{k}\right)\widetilde{\mathbf{M}}_{k}^{-1}\widetilde{\mathbf{K}}_{k} \tag{9}$$

Oikean lopputuloksen kannalta $\mathbf{R}_k$ käyttö kaavassa aiemmin käytetyn $-\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}$ sijasta on välttämätöntä. Koska kaava ei sisällä ominaismuotoja tai -arvoja vain iteraatioaskeleet 1 ja 2 tarvitaan joka kierroksella.

4.5.2 Iteratiivinen DIRS

Kuten [Friswell & al. 1995] huomauttaa iteratiivinen DIRS menetelmä voidaan muodostaa aivan analogisesti iteratiivisen IRS kanssa. (vrt. luvut 4.3 ja 4.4)

4.5.3 Iteratiivinen menetelmä matriisien tiivistämiseen

Qu [1998] esittää iteratiivisen menetelmän elementtimallin matriisien tiivistämiseen. Aluksi lasketaan matriisi

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\,, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mm} & \mathbf{C}_{ms} \\ \mathbf{C}_{sm} & \mathbf{C}_{ss} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Uusi tiivistysmatriisi muodostetaan kaavalla

$$\mathbf{R}_{k+1} = \left(\mathbf{C}_{sm} + \mathbf{C}_{ss}\mathbf{R}_{k}\right)\left(\mathbf{C}_{mm} + \mathbf{C}_{ms}\mathbf{R}_{k}\right)^{-1} \tag{11}$$

Kaava on muodollisesti selvästi tehokkaampi kuin kaava (9), koska $\mathbf{K}_{ss}^{-1}$:lla ei tarvitse kertoa. Lisäksi vain iteraatioaskel 1 tarvitaan joka kierroksella, koska kaava ei sisällä muita muuttujia kuin tiivistysmatriisin **R**.

Valitettavasti $\mathbf{C}_{ss}$:n laskeminen etukäteen vaatii paljon tiekoneaikaa. Selvityksen kirjoittajan mielestä isoilla malleilla voisi olla kannattavampaa laskea tulo $\mathbf{C}_{ss}\mathbf{R}_{k}$ joka iteraatiokierroksella. Se vastaisi $\mathbf{K}_{ss}^{-1}$:lla kertomista, joten menetelmät ovat periaatteessa kutakuinkin yhtä tehokkaita.

Kaava (10) sisältää myös toisen ongelman. Jäykkyysmatriisin kääntäminen edellyttää, että rakenne on kiinni jossakin. Dynaamiset modulit ovat kuitenkin vapaita ennen kuin ne yhdistetään laitteeksi. Siten ennen kaavan (10) soveltamista mallista täytyy poistaa jäykän kappaleen liikkeet, mikä aiheuttaa lisätyötä.

4.6 Tarkka mallin tiivistys/laajennus menetelmä (SEREP)

SEREP [O'Callahan & al. 1989] perustuu koko mallilla laskettuihin ominaismuotoihin. Siksi tiivistetty malli palauttaa tarkasti oikeat ominaismuodot ja -taajuudet muunnosmatriisiin käytetyille ominaismuodoille. Muunnoksen kaava on

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Phi_m \left(\Phi_m^T \Phi_m\right)^{-1} \Phi_m^T \\ \Phi_s \left(\Phi_m^T \Phi_m\right)^{-1} \Phi_m^T \end{bmatrix} \quad (12)$$

Periaatteessa ominaismuotoja voi käyttää vähemmän kuin mitä mallissa säilytetään vapausasteita. Silloin ylimenevä osa tiivistettyjen matriisien riveistä ja sarakkeista on lineaarisesti riippuvia muista. Tällaista mallia voinee käyttää, kun pysytään alle käytettyjen ominaismuotojen taajuuksien. Dynaaminen moduli olisi kuitenkin parempi, jos ominaismuotoja käytettäisiin yhtä paljon kuin tiivistetyssä mallissa on vapausasteita. Silloin muunnosmatriisin ylempi osa on identiteettimatriisi ja alaosa olisi tiivistysmatriisi

$$\mathbf{R} = \Phi_s \left(\Phi_m^T \Phi_m\right)^{-1} \Phi_m^T \quad (13)$$

Tarkka dynaaminen muunnos vaikuttaa houkuttelevalta, mutta selvityksen kirjoittajan mieleen tulee kuitenkin epäilys menetelmän sopivuudesta dynaamisen modulin muodostamiseen. Yleensä pelkät ominaismuodot eivät kovin hyvin pysty kuvaamaan liitoksien käyttäytymistä, mikä vuoksi värähtelymuotojen synteesissä käytetään lisäksi ns. jousto- ja/tai pakkomuotoja.

4.7 Lisätiivistys pakkomuotojen avulla

Bouhaddi ja Fillod [1996] esittävät tiivistysmenetelmän, jossa staattista tiivistystä parannetaan rakenteen ominaismuodoilla, jotka on laskettu liitos kiinnitettynä.

$$\mathbf{u}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}\mathbf{u}_m + \Phi_s \mathbf{q} \quad (14)$$

Kaava vastaa täysin värähtelymuotojen synteesiä, tarkemmin kiinnitetyn liitoksen menetelmää (kts luku 5.2). Kun muotokohtaiset muuttujat **q** ratkaistaan, saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \omega^2 \left(\Omega^2 - \omega^2 \mathbf{I}\right)^{-1} \mathbf{G}\mathbf{u}_m \\ \mathbf{G} &= \Phi_s^T \mathbf{M}_{sm} + \Phi_s^T \mathbf{M}_{ss}\left(-\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

Sijoittamalla kaava (15) kaavaan (14) saadaan tiivistysmatriisi, joka kyllä tiivistää mallin oikean kokoiseksi, mutta tuottaa taajuudesta riippuvan lisätermin. Kun termi linearisoidaan, saadaan korjaustermit tiivistetyille matriiseille

$$\mathbf{G}^T \omega^4 \left(\Omega^2 - \omega^2 \mathbf{I}\right)^{-1} \mathbf{G} \approx \mathbf{G}^T \left(\mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{B}\right) \mathbf{G} = -\Delta \mathbf{K}_{mm} + \omega^2 \Delta \mathbf{M}_{mm} \quad (16)$$

Linearisointi tapahtuu laskemalla taajuudesta riippuvan lävistäjämatriisin arvot kahdella sopivasti valitulla taajuudella ja korvaamalla matriisi näiden pisteiden kautta kulkevilla suorilla.

Loppu tuloksena saadaan siis tiivistetty ominaisarvotehtävä, jossa staattisella tiivistyksellä saatuja matriiseja on korjattu.

$$\left(\tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{mm}} + \Delta\mathbf{K}_{\mathrm{mm}}\right)\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{m}} = \omega^2\left(\tilde{\mathbf{M}}_{\mathrm{mm}} + \Delta\mathbf{M}_{\mathrm{mm}}\right)\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{m}} \qquad (17)$$

Tämä tiivistys menetelmä vaikuttaa lupaavalta, koska se käyttää pakkomuotoja ja kiinnitetyn liitoksen ominaismuotoja. Ne on todettu toimivaksi yhdistelmäksi värähtelymuotojen synteesin yhteydessä. Siten myös liitoksen kuvaus on hyvä.

Toisaalta kaavat eivät anna laajennusmatriisia.

Lisäksi linearisoinnin vuoksi tiivistys toimii vain taajuuksilla, jotka ovat alle alimman kiinnitetyn liitoksen ominaismuodon taajuuden. Dynaamisten moduleiden yhteydessä se ei välttämättä ole suurikaan rajoitus. Visualisoinnin vuoksi tiivistetyssä mallissa säilytetään kuitenkin useita laitteen särmien vapausasteita. Siten kiinnitetyn liitoksen ominaismuotojen taajuudet ovat muutenkin suuria. Särmien vapausasteiden säilyttäminen parantaa jo muutenkin staattista tiivistystä.

Artikkelissa esitetään vielä tarkempaa menettelyä, jossa tiivistetty ominaisarvotehtävä ratkaistaisiin paloissa. Jokaisen kaavalla (17) ratkaistun ominaistaajuuden molemmilta puolista valittaisiin uudet linearisointitaajuudet, laskettaisiin uudet korjausmatriisit ja laskettaisiin tarkempi ominaismuoto ja -taajuus.

5 Värähtelymuotojen synteesi

Värähtelymuotojen synteesi (component mode synthesis, substructure synthesis, substructuring) on varmasti eniten käytetty osakappaleiden kytkentätapa. Se on koeteltu menetelmä, joka on ollut käytössä jo 60-luvulta lähtien.

Kiinnostus värähtelymuotojen synteesiin on edelleen suurta, sillä suurin osa kirjallisuushaussa löydetyissä viitteistä liittyy siihen. Mielenkiintoista oli havaita, että useat artikkelit käsittelivät sitä, miten mittaamalla saadaan osakappaleiden kytkemiseen tarvittavat tiedot. Viime aikoina on kiinnostus suuntautunut erityisesti kiinnitetyn liitoksen menetelmään. Aikaisemmin suosittiin vapaan liitoksen menetelmää, koska kiinnitetyn liitoksen menetelmän vaatima liitospinnan jäykkä tuenta on vaikea toteuttaa käytännössä. Nyt on kehitetty menetelmiä, joilla liitospinnat vapaana tehdyistä mittaustuloksista saadaan kiinnitetyn liitoksen menetelmän tarvitsemat tiedot [Alvin & al. 1994, Morgan & al. 1995, Soucy & Humar 1998, Tinker 1995]. On myös kehitetty menetelmä, jossa käytetään ylimääräisiä massoja liitoksessa [Karpel & Ricci 1997].

Värähtelymuotojen synteesiin perustuvia menetelmiä on useita, mutta kaikissa käytetään hyväksi osarakenteen ominaismuotoja ja -arvoja. Menetelmät eroavat toisistaan siinä, millaisia "lisämuotoja" otetaan mukaan ja siinä, miten osarakenteet liittyvät toisiinsa. Käytännössä osarakenteiden liitospinnat ovat joko kiinnitettyjä tai vapaita, mutta myös sekamenetelmiä löytyy. Katsauksissa [Craig 1995] ja [Seshu 1997] esitellään varsin kattavasti värähtelymuotojen synteesiin kehitystä ja siihen perustuvia menetelmiä sekä niiden käyttökohteita.

Seuraavassa tarkastellaan värähtelymuotojen synteesiä yhden osarakenteen kannalta. Kuten edellä tiivistysmenetelmien yhteydessä rakenne jaetaan kahteen osaan liitokseen (c) ja sisäisiin vapausasteisiin (i).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ic} \\ \mathbf{K}_{ci} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_i \\ \boldsymbol{\varphi}_c \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ic} \\ \mathbf{M}_{ci} & \mathbf{M}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_i \\ \boldsymbol{\varphi}_c \end{Bmatrix} \qquad (18)$$

Toisin kuin edellä sisävapausasteita ei kuitenkaan eliminoida kokonaan pois vaan niiden osuus tiivistetään pienemmäksi. Melkein aina tiivistämiseen käytetään osarakenteen alimpia ominaismuotoja. Silloin ominaisarvotehtävä (18) muuntuu muotoon

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{ii} & \tilde{\mathbf{K}}_{ic} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{ci} & \tilde{\mathbf{K}}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i \\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_c \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{ii} & \tilde{\mathbf{M}}_{ic} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{ci} & \tilde{\mathbf{M}}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i \\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_c \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

missä $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i$ on paljon $\boldsymbol{\varphi}_i$:tä huomattavasti lyhyempi vektori. Siten värähtelymuotojen synteesin matriisit sisältävät myös "epäluonnollisia" vapausasteita ja ovat siten aina pelkkää liitosta suurempia.

5.1 Vapaan liitoksen menetelmä

Vapaan liitoksen menetelmässä osarakenteen kaikki vapausasteet ovat sisäisiä ($\mathbf{K}_{\mathrm{ii}} = \mathbf{K}$ jne.) ja käytetyt ominaismuodot lasketaan liitos vapaana. Liitoksen osuus yhtälöissä muodostetaan kytkentäpintojen yhteensopivuusehtojen avulla. Muunnos on

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{G}_{\bullet\mathrm{c}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{c}} \end{Bmatrix} \qquad (20)$$
$$\mathbf{G} = \mathbf{K}^{-1} - \Phi\Omega^{-2}\Phi^{\mathrm{T}}$$

ja muunnettu ominaisarvotehtävä on

$$\begin{bmatrix} \Omega^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\bullet\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{G}_{\bullet\mathrm{c}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{c}} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\bullet\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{G}_{\bullet\mathrm{c}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{c}} \end{Bmatrix} \qquad (21)$$

Dynaamisen modulin, joka ennen kytkentää on vapaa kappale, kannalta vapaan liitoksen menetelmän heikkous tulee esiin jäännösjoustomuotojen määrityksessä ($\mathbf{G}$, kaava (20)). Siihen tarvitaan osakappaleen jäykkyysmatriisin käänteismatriisi. Vapaalle kappaleelle sitä ei kuitenkaan voida muodostaa ennen kuin jäykän kappaleen liikkeet on poistettu. Lisäksi ne on ratkaisun jälkeen palautettava käänteismuunnoksella.

5.2 Kiinnitetyn liitoksen menetelmä

Kiinnitetyn liitoksen menetelmässä käytetään sekä staattista tiivistystä että liitos kiinnitettynä laskettuja ominaismuotoja (vrt. 4.7). Muunnos on

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{i}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{c}} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & -\mathbf{K}_{\mathrm{ii}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathrm{ic}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{c}} \end{Bmatrix} \qquad (22)$$

ja muunnettu ominaisarvotehtävä on

$$\begin{bmatrix} \Omega^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\mathrm{cc}} - \mathbf{K}_{\mathrm{ci}}\mathbf{K}_{\mathrm{ii}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathrm{ic}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{c}} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Phi^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{M}_{\mathrm{ic}} - \mathbf{M}_{\mathrm{ii}}\mathbf{K}_{\mathrm{ii}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathrm{ic}}\right) \\ \left(\mathbf{M}_{\mathrm{ci}} - \mathbf{K}_{\mathrm{ci}}\mathbf{K}_{\mathrm{ii}}^{-1}\mathbf{M}_{\mathrm{ii}}\right)\Phi & \tilde{\mathbf{M}}_{\mathrm{cc}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{c}} \end{Bmatrix} \qquad (23)$$
$$\tilde{\mathbf{M}}_{\mathrm{cc}} = \mathbf{M}_{\mathrm{cc}} - \mathbf{M}_{\mathrm{ci}}\mathbf{K}_{\mathrm{ii}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathrm{ic}} - \mathbf{K}_{\mathrm{ci}}\mathbf{K}_{\mathrm{ii}}^{-1}\mathbf{M}_{\mathrm{ic}} + \mathbf{K}_{\mathrm{ci}}\mathbf{K}_{\mathrm{ii}}^{-1}\mathbf{M}_{\mathrm{ii}}\mathbf{K}_{\mathrm{ii}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathrm{ic}}$$

Liitoksen muunnettu malli vastaa siten staattista tiivistystä. Kuitenkin malli toimii paljon paremmin, koska myös rakenteen sisäiset vapausasteet ovat mukana ratkaisussa ominaismuotojen kautta. Nyrkkisääntönä on, että ominaismuotoja pitää ottaa mukaan 1.5 - 2 kertaiseen taajuuteen saakka tarkasteltavan taajuuskaistan ylärajaan nähden.

Eräs etu kiinnitetyn liitoksen menetelmässä on se, että liitosvapausasteiden (eli säilytettyjen vapausasteiden) osalta tulosta ei tarvitse muuntaa takaisin siirtymiksi. Se johtuu siitä, että $\mathbf{T}_{\mathrm{cc}} = \mathbf{I}$.

5.3 Ritz'in menetelmä

Värähtelymuotojen synteesimenetelmiä, joissa ei käytetä ominaismuotoja vaan joitain muita vektoreita kutsutaan yleisnimellä Ritz'in menetelmä. Vektoreina voidaan käyttää esim. herätepisteisiin sijoitettujen yksikkövoimien aiheuttamaa siirtymätilaa tai tasavälein suoralaskennalla saatuja siirtymävasteita tutkittavalla taajuuskaistalla. Menetelmä toimii kunhan käytetyt vektorit eivät ole toistensa lineaarikombinaatioita. Yleensä ajatuksena on säästää laskenta-aikaa vektoreita muodostettaessa verrattuna ominaismuotojen laskemiseen.

Monesti erilaisia lisävektoreita tai -muotoja käytetään myös ominaismuotojen lisänä. Niistä kiinnostavimpia lienevät hitausmuodot [Craig 1987]. Hitausmuodot lasketaan liitos kiinnitettynä käyttäen kuormituksena osakappaleeseen kohdistuvaa yksikkö kiihtyvyyttä. Siten tilanne, jossa osakappaleen liike koostuu suureksi osaksi liitoksen liikkeestä tulee tehokkaasti kuvattua.

5.4 Liitosmassan menetelmä

Karpel ja Ricci [1997] esittävät uudenlaisen kytkentä menetelmän, joka sopii myös mittauksiin. Siinä liitosvapausasteisiin lisätään suurehkot pistemassat. Näin lasketuissa ominaismuodoissa korostuu liitoksen osuus, jolloin saadaan enemmän tietoa liitoksesta. Menetelmä on siis eräänlainen vapaan liitoksen variaatio.

6 Taajuusvasteisiin perustuvat tiivistysmenetelmät

Taajuusvasteisiin perustuvat tiivistysmenetelmät on yleensä johdettu mitattuja vasteita ajatellen. Usein paljon vaivaa nähdään erilaisten mittausvirheiden vaikutuksen pienentämiseen. Mikään ei kuitenkaan estä laskemasta rakenteen taajuusvastematriisia, kun rakenne on mallitettu elementtimenetelmällä. Itseasiassa useissa menetelmissä käytetään rakennemallia apuna mittausvirheiden karsimisessa.

Mittauspuolen taajuusvastematriisi tunnetaan laskenta puolella myös dynaamisena joustomatriisina, koska sen on dynaamisen jäykkyysmatriisin käänteismatriisi.

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{f}(\omega), \quad \mathbf{H}(\omega) = \left((1+\mathrm{i}\eta)\mathbf{K} + \mathrm{i}\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}\right)^{-1} \tag{24}$$

Käytännössä sitä ei kuitenkaan lasketa kaavasta (24), sillä dynaamisen jäykkyysmatriisin kääntäminen yleensä sadoilla taajuuksilla vaatii todella paljon tietokoneaikaa. Sen sijaan lasketaan ensin rakenteen ominaismuodot kiinnostavalla taajuuskaistalla ja sitten lasketaan vaste yksikköherätteelle muotojen superponoinnilla. Tällöin ei myöskään tarvitse laskea vastetta kaikille vapausasteille yksikköheräte vuorollaan kaikissa vapausasteissa vaan vain kiinnostaville vapausasteille mahdollisissa heräte- tai liitosvapausasteissa. Silti tulos on tarkka. Siksi taajuusvastemenetelmillä voidaan todella tehokkaasti pienentää mallia.

Suomessa tunnutaan yleensä olevan kovin tarkkoja menetelmän nimityksen suhteen. Siten menetelmien nimet riippuvat mm. siitä, mitä suuretta (siirtymä, nopeus, kiihtyvyys) on mitattu. Tämän selvityksen perusteella näyttää siltä, että kirjallisuudessa termiä "receptance" käytetään varsin vapaasti kuvaamaan johonkin siirtymäsuureeseen perustuvia menetelmiä ja vastaavasti termiä "impedance" käänteisarvoon perustuvia.

6.1 Kahden osarakenteen taajuusvastematriisien yhdistäminen

Laskenta puolella on kauan käytetty yksinkertaisten massa-jousi-vaimennin systeemien taajuusvastefunktioiden (mobiliteetti, impedanssi) yhdistämistä monimutkaisempien systeemien vasteen laskentaan. Yhdistäminen perustuu sarjan tai rinnan analogiaan eli sama voima menee komponenttien läpi tai komponenteilla on sama siirtymä. Mittaustuloksia on myös pitkään käytetty samaan tapaan. Kyse on kuitenkin yleensä ollut pisteittäisistä kytkennöistä.

Kun kappaleiden välinen liitos on laajempi täytyy käyttää yksittäisen funktion sijasta funktiomatriisia sen kuvaamiseen. Osarakenteita voidaan myös matriisien avulla kytkeä voima- tai siirtymä periaatteella. Hu & al. [1993] vertaavat näitä suoraviivaisia menetelmiä ja yhdistettyä taajuusvastematriisin käyttöä yhdistetyn rakenteen laskennassa. Tässä yhteydessä yhdistetty taajuusvastematriisi on kiinnostavampi systemaattisuutensa vuoksi.

Kahden osarakenneteen A ja B taajuusvasteyhtälöt sisä- ja liitosvapausasteisiin jaettuina ovat

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{A}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathrm{AA}}^{\mathrm{A}} & \mathbf{H}_{\mathrm{Ac}}^{\mathrm{A}} \\ \mathbf{H}_{\mathrm{cA}}^{\mathrm{A}} & \mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{A}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{A}} \end{Bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{B}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathrm{BB}}^{\mathrm{B}} & \mathbf{H}_{\mathrm{Bc}}^{\mathrm{B}} \\ \mathbf{H}_{\mathrm{cB}}^{\mathrm{B}} & \mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{B}} \end{Bmatrix} \tag{25}$$

Yhdistetyn rakenteen C taajuusvasteyhtälö on

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{C}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathrm{AA}}^{\mathrm{C}} & \mathbf{H}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{C}} & \mathbf{H}_{\mathrm{Ac}}^{\mathrm{C}} \\ \mathbf{H}_{\mathrm{BA}}^{\mathrm{C}} & \mathbf{H}_{\mathrm{BB}}^{\mathrm{C}} & \mathbf{H}_{\mathrm{Bc}}^{\mathrm{C}} \\ \mathbf{H}_{\mathrm{cA}}^{\mathrm{C}} & \mathbf{H}_{\mathrm{cB}}^{\mathrm{C}} & \mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{C}} \end{Bmatrix} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{\mathrm{AA}}^{\mathrm{C}} &= \mathbf{H}_{\mathrm{AA}}^{\mathrm{A}} - \mathbf{H}_{\mathrm{Ac}}^{\mathrm{A}} \left(\mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{A}} + \mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{B}} \right)^{-1} \mathbf{H}_{\mathrm{cA}}^{\mathrm{A}} \\
\mathbf{H}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{C}} &= \mathbf{H}_{\mathrm{Ac}}^{\mathrm{A}} \left(\mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{A}} + \mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{B}} \right)^{-1} \mathbf{H}_{\mathrm{cB}}^{\mathrm{B}} \\
\mathbf{H}_{\mathrm{Ac}}^{\mathrm{C}} &= \mathbf{H}_{\mathrm{Ac}}^{\mathrm{A}} \left(\mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{A}} + \mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{B}} \right)^{-1} \mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{B}} \\
\mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{C}} &= \mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{A}} \left(\mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{A}} + \mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{B}} \right)^{-1} \mathbf{H}_{\mathrm{cc}}^{\mathrm{B}}
\end{aligned}$$

Muut termit saadaan A:ta ja B:tä vaihtamalla. Kaavasta näkee, että kun heräte kohdistuu vain kappaleeseen A, niin vain ensimmäinen sarake täytyy laskea.

Taajuusvastemenetelmä on periaatteessa tarkka ja isokin matriisi voidaan kutistaa vain muutamaan vapausasteeseen. Jos taajuusvastematriisi lasketaan alimpien ominaismuotojen avulla jää korkeampien ominaismuotojen vaikutus pois. Ominaistaajuuksien lähellä sillä ei yleensä ole merkitystä, mutta ominaistaajuuksien välillä vaikutus on suurempi.

Verrattaessa taajuusvastemenetelmiä edellä esitettyihin täytyy muistaa, että liitosmatriisi pitää kääntää kaikilla taajuuksilla, mikä laajalla liitoksella voi olla laskennallisesti raskasta.

Useamman osakappaleen kytkeminen tapahtuu osakappale kerrallaan.

6.2 Yleinen menetelmä yhdistetyn taajuusvastematriisin muodostamiseksi

Ren ja Beards [1995] esittävät yleisemmän menettelyn osarakenteiden taajuusvastematriisien yhdistämiseksi. Kaava ei ole kovin havainnollinen, koska osakappalejakoa ei käytetä vaan kaikki sisävapausasteiden (i) funktiot on kerätty yhteen ja liitosvapausasteet on eroteltu vastinpareittain kahdeksi ryhmäksi (a ja b).

$$\mathbf{H}^{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathrm{ii}} & \mathbf{H}_{\mathrm{ia}} \\ \mathbf{H}_{\mathrm{ai}} & \mathbf{H}_{\mathrm{aa}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathrm{ib}} - \mathbf{H}_{\mathrm{ia}} \\ \mathbf{H}_{\mathrm{ab}} - \mathbf{H}_{\mathrm{aa}} \end{bmatrix} \left(\mathbf{H}_{\mathrm{aa}} + \mathbf{H}_{\mathrm{bb}} - \mathbf{H}_{\mathrm{ab}} - \mathbf{H}_{\mathrm{ba}} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathrm{ib}} - \mathbf{H}_{\mathrm{ia}} \\ \mathbf{H}_{\mathrm{ab}} - \mathbf{H}_{\mathrm{aa}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

Kaavalla voi yhdistää monta osakappaletta yhtäaikaa. Koska osakappalerajoista ei välitetä, voi myös saman osakappaleen vapausasteita kytkeä keskenään. Usean osakappaleen yhtäaikaisessa kytkennässä liitoksen koko kuitenkin kasvaa, joten liitosmatriisin kääntäminen tulee työläämmäksi. Tietenkin kaavaa voi käyttää myös ketjussa kytkemään aina vain kaksi osakappaletta keskenään.

Kaavaa (27) kiinnostavampi on kenties samassa artikkelissa annettu kaava, jolla kytkentä tehdään vapausastepari (i,j) kerrallaan.

$$\mathbf{H}^{\mathrm{C}} = \mathbf{H} - \frac{1}{h_{ii} + h_{jj} - 2h_{ij}}\left(\mathbf{h}_{\bullet j} - \mathbf{h}_{\bullet i}\right)\left(\mathbf{h}_{\bullet j} - \mathbf{h}_{\bullet i}\right)^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

6.3 Osarakenteiden yhdistäminen muutamien taajuuksien vasteiden avulla

Lin [1999] esittää mielenkiintoisen menetelmän, jossa osarakenteiden yhdistäminen tehdään muutamien taajuuksien vasteista muodostetun apumatriisin avulla.

Ensin johdetaan osarakenteiden laskennallisia taajuusvastematriiseja käyttäen yhdistetyn rakenteen vaste liitoksessa vaikuttaville herätevoimille.

$$\mathbf{H}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Ac}} = \mathbf{H}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Ac}}\left(\mathbf{H}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{cc}}\right)^{-1}\left(\left(\mathbf{H}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{cc}}\right)^{-1} + \left(\mathbf{H}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{cc}}\right)^{-1}\right)^{-1} \tag{29}$$

$\mathbf{H}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Bc}}$ saadaan vaihtamalla A ja B. Koska jo yksi taajuusvastematriisin sarake sisältää tiedon rakenteen ominaismuodoista ja -taajuuksista, lasketaan osakappaleiden vasteet, kun vain yhdessä liitoksen vapausasteessa vaikuttaa yksikön suuruinen heräte. Yhdistämällä vasteet saadaan tarvittava sarake.

$$\mathbf{h}^{\mathrm{C}}(\omega) = \begin{Bmatrix} \mathbf{h}^{\mathrm{A}}_{\bullet k} \\ \mathbf{h}^{\mathrm{B}}_{\bullet k} \end{Bmatrix} \tag{30}$$

Laskemalla vaste vain muutamalla taajuudella saadaan muodostettua kompleksiset apumatriisit

$$\mathbf{A} = \left[\omega_{p1}^2 \mathbf{h}^{\mathrm{C}}(\omega_{p1}) - \omega_{q1}^2 \mathbf{h}^{\mathrm{C}}(\omega_{q1}) \quad \cdots \quad \omega_{pn}^2 \mathbf{h}^{\mathrm{C}}(\omega_{pn}) - \omega_{qn}^2 \mathbf{h}^{\mathrm{C}}(\omega_{qn})\right] \tag{31}$$

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{h}^{\mathrm{C}}(\omega_{p1}) - \mathbf{h}^{\mathrm{C}}(\omega_{q1}) \quad \cdots \quad \mathbf{h}^{\mathrm{C}}(\omega_{pn}) - \mathbf{h}^{\mathrm{C}}(\omega_{qn})\right] \tag{32}$$

Nyt epäsymmetrisestä kompleksisesta ominaisarvotehtävästä

$$\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \omega^2 \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \tag{33}$$

voidaan ratkaista ominaismuodot ja -taajuudet. Ominaistaajuudet tulevat suoraan oikein ja yhdistetyn rakenteen ominaismuodot saadaan muunnoksella

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (34)$$

Saadut ominaismuodot voidaan myös massanormeerata vastearvoja käyttäen.

Edellä esitetyt kaavat on johdettu olettaen, että kaikki osarakenteiden ominaismuodot on laskettu. Käytännössä kuitenkin lasketaan vain välttämättömät alimmat ominaismuodot. Siksi artikkelissa johdetaan vielä kaavat, joissa käytetään vain alimpia ominaismuotoja ja sarjamuotoista korjaustermiä korkeammille muodoille.

Esimerkki laskettiin vain kahta ensimmäistä sarjan korjaustermiä käyttäen sekä ilman korjausta. Tulokset vaikuttavat hyviltä ja korjauksella on selvästi merkitystä. Yleensä muotojen superponoinnin tuloksia pidetään hyvinä, kunhan vähintään koko tarkasteltava taajuuskaista on katettu. Ilmiö johtunee siitä, että käytettyjä vasteita ei saa laskea ominaistaajuuksien kohdalla, jolloin pois jäävien ominaismuotojen vaikutus korostuu.

7 Yhteenveto

Tässä kirjallisuusselvityksessä on käyty läpi erilaisia elementtimallin tiivistysmenetelmiä, jotka pyrkivät säilyttämään alkuperäisen mallin dynaamiset ominaisuudet. Valitettavasti useimpien esitysten yhteydessä on käytetty varsin pieniä ja yksinkertaisia sauva- tai palkkiesimerkkejä. Jos esimerkeissä yhdistetään osakappaleita toisiinsa, niin lähes aina käytetään vain kahta osakappaletta. Kuitenkin kokemus on osoittanut, että pistemäisellä kytkennällä ja kahdella osakappaleella lähes mikä tahansa menetelmä toimii. Kytkentämenetelmän todellinen toimivuus paljastuu vasta useamman osakappaleen ja laajan kontaktin esimerkeillä. Siten käytettävän menetelmän valinta vaatii vielä lupaavimpien menetelmien vertaamista suuremmalla ja realistisemmalla esimerkillä.

Eri tyyppisistä menetelmistä voi kuitenkin sanoa seuraavaa:

Suorien tiivistysmenetelmien etuna on se, että tulos on suoraan käytettävissä ilman jälkikäsittelyä. Useimmat sisältävät staattista eliminaatiota vastaavan termin, joka kuvaa liitoksen staattisen käyttäytymisen tarkasti. Dynaamisten ominaisuuksien parantamiseksi voidaan joutua ottamaan mukaan ylimääräisiä vapausasteita eli suurentamaan modulia.

Värähtelymuotojen synteesi on koeteltu menetelmä, jonka tarkkuus ja toimivuus suurillakin malleilla tunnetaan. Periaatteessa moduliin tarvitaan vain liitos ja välttämättömät ominaismuodot. Silloin joudutaan kuitenkin tiivistetyn mallin tulos laajentamaan visualisointivapausasteisiin. Jos nekin otetaan "liitokseen" mukaan, niin tulosta ei tarvitse laajentaa, mutta modulin koko kasvaa. Toisaalta, silloin tarvitaan myös vähemmän ominaismuotoja.

Taajuusvastemenetelmillä voidaan periaatteessa päästä todella suuriin tiivistyksiin, niiden teoreettisen tarkkuuden vuoksi. Jos taajuusvastematriisi muodostetaan muotojen superponoinnilla, niin tarkkuus huononee. Taajuusvastemenetelmillä lasketaan suoraan vastetta. Jos myös ominaismuodot ja -taajuudet halutaan, on ne määritettävä erikseen. Taajuusvastemenetelmät sopivat suoraan yhteen mitatun datan kanssa. Siten erillisten liitoskomponettien mallittaminen mittaamalla on helppoa.

8 Kirjallisuus

Alvin, K.F., Park, K.C. & Peterson, L.D. A minimal-order experimental component mode synthesis: New results and challenges. Collection of Technical Papers -P. of the AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 3 April 18-20 1994. AIAA, 1994, 1265-1275.

Värähtelymuotojen synteesi mittausten avulla. Voisi yhdistää laskettuihin osakappaleisiin. Mittauksissa liitokset ovat vapaina, mutta mittaustuloksista määritetään kuitenkin kiinnitetyn liitoksen menetelmää vastaavat matriisit.

Bouhaddi, N. & **Fillod**, R. Model reduction by a simplified variant of dynamic condensation. J. of Sound and Vibration 191, 2, 1996, 233-250.

Versio dynaamisesta tiivistyksestä, jossa sisävapausasteiden dynaaminen jäykkyysmatriisin käänteismatriisi korvataan sarjakehitelmällä. Kehitelmästä otetaan vain 2 ensimmäistä termiä. Lopputuloksena on kuitenkin dynaaminen jäykkyysmatriisi, joka sisältää ω^6 termin, josta ominaismuotoja ei voi määrittää normaalisti.

Bouhaddi, N. & **Fillod**, R. Substructuring by a two level dynamic condensation method. Computers & Structures 60, 3, 1996, 403-409.

Kiinnitetyn liitoksen menetelmää tiivistetään kahdessa vaiheessa. Ensin sisäisiä vapausasteita vastaavat muodot eliminoidaan. Koska tulos on sisältää korkeampia ω^{2n} termejä, se linearisoidaan kahden taajuuden avulla. Näin saadaan korjaustermit staattisen eliminaation mukaisille jäykkyys- ja massamatriisille. Tiivistetylle rakenteelle lasketaan ominaismuodot ja näitä käytetään yhdistetyn ominaisarvotehtävän pienentämiseen. Valitettavasti linearisointi toimii vain taajuuksilla, jotka ovat osakappaleiden alimpien kiinnitettyjen ominaistaajuuksia pienempiä.

Craig, R.R. Jr. A review of time-domain and frequency-domain component mode synthesis method. International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis 2, 2, 1987, 59 - 72.

Tarkastellaan erilaisia komponenttimuotosettejä ja niiden täydellisyyttä.

Craig, R.R. Jr. Substructure methods in vibration. Transactions of the ASME - Design Engineering 117, 1995, 207-213.

Hyvä yleisesitys värähtelymuotojen synteesistä. Yleistetty osarakenteiden kytkeminen Lagrangen kertoimien avulla. Kattava lista sovelluksista ja alan kehityksestä Amerikassa viitteineen.

Friswell, M.I., Penny, J.E.T & Grvey, S.D. Using linear model reduction to investigate the dynamic s of structures with local non-linearities. Mecanical Systems and Signal Processing 9, 3, 1995, 317-328.

Vertaa neljää lineaarista elementtimallin tiivistys menetelmää. Yksinkertainen esimerkki; kuusi massa-jousi-vaimennin systeemiä sarjassa.

Friswell, M. I., Garvey, S. D. & Penny, J. E. T. Modal reduction using dynamic and iterated IRS techniques. J. of Sound and Vibration 186, 2, 1995, 311 - 323.

Parantaa IRS menetelmää käyttämällä staattisen tiivistyksen sijasta dynaamista. Lisäksi esitetään iteratiivinen IRS menetelmä, joka konvergoi tiivistettyyn malliin, joka antaa oikeat alimmat ominaistaajuudet.

Guyan, R. J. Reduction of stiffness and mass matrices. AIAA Journal, 3, 1965, s. 380.

Staattinen tiivistys.

Hu, H.M., Ju, M.S. & Tsuei, Y.G. Comparison study of modal synthesis methods. Proceedings of SPIE 1993, 2, 877-882.

Yhdistetyn rakenteen vaste suoralla siirtymä- ja voimatekniikalla sekä yhdistetyn rakenteen taajuusvastematriisi.

Karpel, M. & **Ricci**, S. Experimental modal analysis of large structures by substructuring. J. of Mecanical Systems amd Signal Processing 11, 2, 1997, 245-256.

Osarakenteiden kytkeminen käyttäen ominaismuotoja, jotka on saatu mittauksissa, joissa osarakenteiden liitossolmuihin on lisätty ylimääräiset massa tunnettujen jousien avulla. Ajatus on, että tällaiset ominaismuodot sisältävät ylimääräistä tietoa myös liitoksesta.

Klinge, P. Värähtelymuotojen synteesi matriisin osituksella. Lisensiaatin työ, HTKK, 1998. 71 s.

Värähtelymuotojen synteesin johto matriisin osituksella, joten yhteensopivuusehtoja ei tarvitse erikseen asettaa osakappaleiden välille. Yhdistetyn ominaisarvotehtävän pienentäminen liitoksen ominaismuotojen avulla.

Leung, A.Y.T. Dynamic stiffness and substructures. Springer-Verlag, London, 1993, 240 s.

Dynaamiset osarakenteet dynaamisen jäykkyysmatriisin avulla. Vastaa kiinnitetyn liitoksen menetelmää. Muodollisesti sisävapausasteita vastaava osa dynaamisesta jäykkyysmatriisista pitäisi kääntää kaikilla käsiteltävillä taajuuksilla. Työn suuruuden vuoksi toistuva kääntäminen on kierretty muodostamalla käänteismatriisi ominaismuotojen avulla. Tuloksena on kuitenkin dynaaminen jäykkyysmatriisi, jossa on myös ω^4 termi, josta ominaismuotoja ei voi määrittää normaalisti.

Lin, M.R. Generalized receptance-based method for accurate and efficient modal synthesis. Int. J. for numerical Methods in Engineering 44, 1999, 1749-1767.

Ensin johdetaan osarakenteiden laskennallisia taajuusvastematriiseja käyttäen yhdistetyn rakenteen vaste. Käyttäen herätettä vain yhdessä liitosvapausasteessa saadaan yhdistetyn rakenteen vaste, josta periaatteessa voidaan ratkaista yhdistetyn rakenteen ominaismuodot ja taajuudet. Laskemalla vaste muutamalla eri taajuudella muodostetaan kompleksinen yleistetty ominaisarvotehtävä, jonka avulla saadaan yhdistetyn rakenteen ominaismuodot ja -taajuudet. Kaavat on johdettu olettaen kaikki osarakenteiden ominaismuodot tunnetuiksi. Lopuksi johdetaan kuitenkin kaavat, joissa käytetään vain alimpia ominaismuotoja ja sarjamuotoista korjaustermiä korkeammille muodoille. Esimerkeissä sarjasta käytettiin vain kahta ensimmäistä termiä. Tulokset vaikuttavat hyviltä.

Majed, A. & **Spanos**, P.D. Nonlinear dynamics of structures via residual flexibility of components. J. of Aerospace Engineering, October 1997, 172-178.

Osarakenteet ovat lineaarisia ja verrannollisesti vaimennettuja. Liitos sisältää kaiken epälineaarisuuden, kitkan, vaimentimet jne. Osakappaleet ratkaistaan erikseen, kun liitosvoimat on ratkaistu. Vapaan liitoksen muodot ja jäännösjoustomuodot. Aikatason iterointi.

Morgan, J.A., Pierre, C. & Hulbert G.M. Calculation of component mode synthesis matrices from measured frequency response functions. ASME - Design Engineering Technical conferences, September 17-20 1995, 3, B/2, 861-876.

Värähtelymuotojen synteesi mittausten avulla. Voisi yhdistää laskettuihin osakappaleisiin. Mittauksissa liitokset ovat vapaina, mutta mittaustuloksista määritetään kuitenkin kiinnitetyn liitoksen menetelmää vastaavat matriisit. Vertailutulokset kahden palkin kytkennästä.

Morgan, J.A., Pierre, C. & Gregory, M.H. Component mode syhthesis methods for non-proportionally dambed systems. Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC 1999, 2, 1472-1480.

Kiinnitetyn ja vapaan liitoksen menetelmät yleiselle viskoosille vaimennukselle tilamuuttujien avulla. Kaikki matriisit ja vektorit kompleksisia.

O´Callahan, J.C. A procedure for an improved reduced system (IRS) model. Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, 1989, 17-21.

Parannettu versio staattisesta tiivistyksestä. Korjaustermi saadaan, kun otetaan huomioon hitausvoimien vaikutus eliminoiduissa vapausasteissa. Loppukommentti viittaa ajatukseen iteraatiosta, mutta sitä ei ilmeisesti käytetä esimerkeissä.

O´Callahan, J.C., Avitabile, P. & Riemer, R. System equivalent reduction expansion process (SEREP). Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, 1989, 29-37.

Elementtimallin tiivistävä muunnosmatriisi muodostetaan rakenteen ominaismuotojen avulla. Tiivistetty ominaisarvotehtävä palauttaa samat ominaismuodot ja -taajuudet kuin mitä tiivistysmatriisin muodostamiseen on käytetty. Käytännössä tarvitaan siis yhtä paljon ominaismuotoja kuin tiivistetyssä mallissa on vapausasteita. Sillon tiivistetyssä mallissa mikään ei kompensoi pois jätettyjen muotojen osuutta. Miten hyvin toimii liitoksen staattinen osuus?

Qu, Z.-Q. A multi-step method for matrix condensation of finite element models. J. of Sound and Vibration, 214, 5, 1998, 965 - 971.

Iteratiivinen mallin tiivistysmenetelmä. Konvergoi kohti tiivistettyä mallia, joka antaa oikeat alimmat ominaistaajuudet. Menetelmässä iteroidaan suoraan tiivistysmatriisia. Tiivistetyn ominaisarvotehtävän ratkaisua käytetään vain konverkoinnin toteamiseen.

Ren, Y. & **Beards**, C.F. On substructure synthesis with FRF data. J. of Sound and Vibration 185, 5, 1995, 845-866.

Vertaa voima- ja siirtymämenetelmää kahden osarakenteen yhdistämisessä. Esittää yleistetyn siirtymämenetelmän, jossa osakappaleita käsitellään kuten yhdistettyä järjestelmää. Ei kovin havainnollista. Myös useamman osakappaleen liittyminen samaan kohtaan on mahdollista. Kiinnostavalta vaikuttaa myös yksinkertainen ratkaisualgoritmi, jossa yhdistäminen tapahtuu kaksi vapausastetta kerrallaan.

Rivera, M.A., Singh, M.P. & Suarez, L.E. Dynamic condensation approach for nonclassically damped structures. AIAA Journal 37, 5, 1999, 564-571.

Iteratiivinen elementtimallin tiivistys menetelmä, joka sallii yleisen viskoosin vaimennusmatriisin. Samalla ratkaistaan kompleksiset ominaismuodot. Ominaisarvotehtävä muunnetaan tilamuuttujien avulla ensimmäisen asteen ongelmaksi => 2 x määrä muuttujia. Laskutoimitukset voidaan kuitenkin toteuttaa alkuperäisten matriisien avulla.

Seshu, P. Substructuring and component mode synthesis. Shock and Vibration 4, 3, 1997, 199 - 210.

Hyvä kirjallisuuskatsaus värähtelymuotojen synteesin kehitykseen ja käyttökohteisiin.

Soucy, Y. & **Humar**, J.L. Experimental verification of a new test based modal synthesis approach. Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC 1998, 2, 1125-1130.

Sekamenetelmän (vapaa ja kiinnitetty liitos) toteutus mittaustulosten perusteella. Erityisen kiinnostavaa on, että mitattaessa osakappaleet voivat olla mielivaltaisesti tuettuja. Tuennan vaikutus poistetaan jatkokäsittelyssä niin, että tulokset vastaavat jäykkää kiinnitystä.

Suarez, L.E. & **Singh**, M.P. Dynamic condensation method for structural eigenvalue analysis. AIAA Journal 30, 4, 1992, 1046-1054.

Iteratiivinen elementtimallin tiivistys menetelmä, joka samalla ratkaisee ominaismuodot. Valitettavasti yleistetyssä muodossa oleva ominaisarvotehtävä on ensin muutettava standardi muotoon.

Tinker, M.L. Modal vibration test facilities and methods for space station modules. AIAA Collection of Technical Papers - AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 3 April 10-13 1995. AIAA, 1995, 1190-1197.

Mielenkiintoinen kertomus vaikeuksista järjestää jäykkää tai todellisuutta vastaavaa kiinnitystä koetilanteessa. Lopulta päädyttiin vapaaseen ripustukseen ja joustomuotoihin. Kokeiltiin myös menetelmää, jossa joustomuotojen sijasta käytettiin ominaismuotoja, jotka saatiin, kun liitokseen lisättiin pistemassoja.

Tsai, J.-S. & **Chou**, Y.-F. Modeling of the dynamic charactersitics of two-bolt-joints. J. of the Chinese Institute of Engineers 11, 3, 1988, 235-245.

Pulttiliitoksen jäykkyys ja vaimennus määritetään osarakennetekniikalla mitatuista taajuusvastefunktioista. Laskee ulos liitoksen jäykkyys- ja vaimennusmatriisin. Eri pisteistä ja eri taajuuskaistoilta saadaan erilaisia jäykkyyksiä ja vaimennuksia. Kahden pultin liitos lasketaan käyttäen edellä määritettyjä yhden pultin ominaisuuksia.

Wang, J.H. & **Liou**, C.M. Experimental substructutre synthesis with linear joints. Vibration Analysis - Techniques and Application, ASME Design Engineering Division Publication, v 18 pt 4, 17-21.9.1989, 29-36.

Koko rakenteen taajuusvastefunktiot osarakenteiden funktioiden avulla. Liitoksen ominaisuudet määrätään mittaamalla osarakenne liitoksen kanssa ja ilman. Hyviä tuloksia keskiarvoistamalla eri taajuuksilla saadut liitoksen jäykkyys- ja vaimennusarvot, jotka siis oletetaan taajuudesta riippumattomiksi. Vain kahden osakappaleen kaavat. Esimerkkinä kaksi kahdesta kohtaa kumipaloilla toisiinsa liitettyä palkkia.

Wang, W. & **Kirkhope**, J. Complex component mode synthesis for damped systems. J. of Sound and Vibration 181, 5, 1995, 781-800.

Vaimennettujen osarakenteiden menetelmä. Vapaan liitoksen kompleksisten värähtelymuotojen synteesi johdetaan. Sekä viskoosi että gyroskooppi sekä rakenteellinen vaimennus otetaan huomioon. Siten myös epäsymmetriset matriisit sallitaan. Ratkaisu johtaa tilamuuttujiin ja kaksinkertaiseen yhtälöryhmään sekä kaksinkertaisiin (kummankin puolen) kompleksisiin ominaismuotoihin. Kiinnostavinta artikkelissa on, että kompleksisella ratkaisijalla laskettuja tuloksia verrataan reaalisilla ominaismuodoilla laskettuihin tuloksiin. Johtopäätös on, että suhteellisen vaimennuksen ollessa alle 70 % reaaliset ominaismuodot riittävät! Tuloksen yleistettävyyttä vähentää kuitenkin se, että esimerkkeinä käytettiin vain roottoreita.

Wu, C. The application of FE parametric quadratic programming method to contact problem analysis in mechanical engineering. European Conference on Computational Mechanics, 31.8-3.9.1999, Munic, Germany. 13 s.

Paperi on kovin epämääräinen ja viittaa vain yhteen kiinalaiseen lähteeseen vuodelta 1997. Väite on kuitenkin se, että PQP menetelmällä voidaan kitkallinen kontaktiongelma ratkaista tehokkaammin iteroimatta. Kiinnostava asia artikkelissa on osarakenteiden käyttö. Muut kuin kontakti solmut eliminoidaan ratkaisusta omiksi osakappaleikseen. Paljon isoja esimerkkejä, mutta huonosti dokumentoituna.

Zhang, Q.J. & **Sainsbury**, M.G. On the exact reduction and eigensolution for the Galerkin element method. Computers & Structures 71, 1999, 413-422.

Ominaisarvotehtävä ratkaistaan herravapausasteiden avulla dynaamista (jäykkyysmatriisia) eliminaatiota käyttäen. Siten tulos on tarkka ko. taajuudella (staattinen eliminaatio tapahtuu 0 Hz taajuudella). Iteraatio vaatisi jatkuvaa taajuuden vaihtamista ja uutta dynaamisen orjajäykkyysmatriisin kääntämistä. Kääntäminen on kuitenkin vältettävissä orjavapausasteiden ominaismuotojen avulla!