

Vikatietojen tilastollinen analyysi

Sensuroinnin vaikutus Weibull-mallien estimoinnissa

Eva Bergman



ISBN 951-38-5005-6

ISSN 1235-0613

ISBN 951-38-5006-4 (URL: <http://www.inf.fi/pdf/>)

ISSN 1455-0857 (URL: <http://www.inf.fi/pdf/>)

Copyright © Valtion teknillinen tutkimuskeskus (VTT) 1998

JULKAISIJA – UTGIVARE – PUBLISHER

Valtion teknillinen tutkimuskeskus (VTT), Vuorimiehentie 5, PL 2000, 02044 VTT
puh. vaihde (09) 4561, faksi (09) 456 4374

Statens tekniska forskningscentral (VTT), Bergsmansvägen 5, PB 2000, 02044 VTT
tel. växel (09) 4561, fax (09) 456 4374

Technical Research Centre of Finland (VTT),
Vuorimiehentie 5, P.O.Box 2000, FIN-02044 VTT, Finland
phone internat. + 358 9 4561, fax + 358 9 456 4374

VTT Valmistustekniikka, Turvallisuustekniikka, Tekniikankatu 1, PL 1701, 33101 TAMPERE
puh. vaihde (03) 316 3111, faksi (03) 316 3282

VTT Tillverknings teknik, Säkerhetsteknik, Tekniikankatu 1, PB 1701, 33101 TAMMERFORS
tel. växel (03) 316 3111, fax (03) 316 3282

VTT Manufacturing Technology, Safety Engineering,
Tekniikankatu 1, P.O.Box 1701, FIN-33101 TAMPERE, Finland
phone internat. + 358 3 316 3111, fax + 358 3 316 3282

Bergman, Eva. Vikatietojen tilastollinen analyysi. Sensuroinnin vaikutus Weibull-mallien estimoinnissa [Statistical processing for failure data - estimating Weibull models with censored data]. Espoo 1998, Valtion teknillinen tutkimuskeskus, VTT Julkaisuja – Publikationer 831. 153 s. + liitt. 21 s.

Avainsanat: fault analysis, failures, statistical analysis, safety analysis, Weibull distribution

Tiivistelmä

Vikatietojen jalostus informaatioksi vaatii tilastollisten menetelmien käyttöä. Vikadatan tilastollisen analyysin tavoitteena on löytää kohdetta mahdollisimman hyvin kuvaava tilastollinen malli ja estimoida tämän mallin parametrit. Tämän jälkeen voidaan laskea erilaisia kohdetta kuvaavia tunnuslukuja. Tässä esityksessä käsitellään sopivan mallin löytämiseen käytettäviä menetelmiä sekä uskottavuusmenetelmiin perustuvaa estimointiteoriaa.

Kaksi käyttövarmuuslaskennassa yleisesti käytettyä tilastollista mallia ovat Weibull-jakauma ja Weibull-prosessi. Weibull-mallien yleiset ominaisuudet esitellään lyhyesti ja tarkennetaan uskottavuusmenetelmät niille.

Sensuroidulla tiedolla tarkoitetaan eräänlaista puuttuvaa tietoa siinä mielessä, että kohteen havainnointi on lopetettu ennen sen varsinaista vikaantumista. Tässä esityksessä tutkitaan sensuroinnin vaikutuksia sekä Weibull-jakauman että Weibull-prosessin kohdalla. Tutkimusmenetelmänä on simulointi. Todetaan, että sensurointi kadottaa informaatiota ja lisää tilastollisten päätelmien epävarmuutta. Pohditaan lisäksi kunnossapitoa “sensuroijana” ja sen vaikutuksia tilastoanalyysin kannalta.

Bergman, Eva. Statistical processing for failure data - estimating Weibull models with censored data [Vikatietojen tilastollinen analyysi. Sensuroinnin vaikutus Weibull-mallien estimoinnissa]. Espoo 1998, Technical Research Centre of Finland, VTT Julkaisuja – Publikationer 831. 153 p. + app. 21 p.

Keywords: fault analysis, failures, statistical analysis, safety analysis, Weibull distribution

Abstract

When refining failure data into more useful information, it is necessary to use statistical methods. The aim of the statistical analysis is to find the best possible statistical model and to estimate the parameters of this model. Two most commonly used statistical models in dependability analysis are the Weibull-distribution and the Weibull-process. This presentation deals with methods for finding the appropriate model and also the likelihood-based estimation theory for the model parameters is examined.

In many cases failure data is censored, which means that the observing period ends before the target actually fails. In this discourse it is shown that censoring affects the model and its estimates. It is concluded that censoring loses information and increases the uncertainty of statistical conclusions. Also, the meaning of preventive maintenance as a censoring factor is discussed.

Alkusanat

Tämä pro gradu -työ on tehty tilaustutkimuksena VTT Valmistustekniikalle. Työskentely tapahtui Turvallisuustekniikan tutkimusalueella, Riskienhallinnan tutkimusryhmässä. Työ liittyy Tekesin ja VTT Valmistustekniikan rahoittamaan Järjestelmätarkastelut-projektiin. Järjestelmätarkastelut-projekti toteutetaan Tekesin Käyttövarmuus Kilpailutekijänä (KÄKI) -teknologiaohjelmassa.

Työssä tarkastellaan vikatietojen mallinnuksessa yleisesti käytettäviä Weibull-malleja ja erityisesti niiden parametrien luottamus- ja uskottavuusjoukkojen käyttäytymistä sensuroinnin vaikutuksen alaisena.

Kiitos tekn. lis. Tony Rosqvistille, tutkimusprofessori Veikko Rouhiaiselle, tekn. toht. Arja Toolalle ja dipl.ins. Janne Sarsamalle saamistani kommentteista.

Erityiskiitos työn ohjaajalle, professori Elja Arjakselle arvokkaista neuvoista, kommentteista ja kannustuksesta.

Tampereella tammikuussa 1998

Eva Bergman

Sisällysluettelo

Tiivistelmä	3
Abstract	4
Alkusanat	5
1 Johdanto	8
2 Tavoite	10
3 Määritelmiä ja matemaattisia menetelmiä	12
3.1 Merkintöjä	14
3.2 Todennäköisyysjakaumat, malleja yksiköille	16
3.3 Stokastiset prosessit, malleja järjestelmille	19
3.3.1 Laskuri prosessit	20
3.4 Sensurointi	31
3.4.1 Sensurointi jakaumamallille	31
3.4.2 Sensurointi prosessimallille	35
3.5 Uskottavuusmenetelmät	37
3.5.1 Uskottavuusmenetelmät jakaumamallille	37
3.5.2 Uskottavuusmenetelmät prosessimallille	51
4. WEIBULL-MALLIT	54
4.1 Jakauma ja prosessi, kaksi eri mallia	54
4.1.1 Weibull-jakauma	54
4.1.2 Weibull-prosessi	55
4.2 Weibull-jakautuneen datan käsittelyä	55
4.2.1 Uskottavuusmenetelmät	55
4.3 Weibull-prosessia noudattavan datan käsittelyä	60
4.3.1 Uskottavuusmenetelmät	60
4.3.2 Riippumattomien aineistojen yhdistäminen	65
4.3.3 Kunnossapidon vaikutus korjattavan järjestelmän vikatiedon tilastolliseen käsittelyyn	71
5. Sensuroinnin vaikutus estimointiin	74
5.1 Weibull-jakauman parametrien ja luottamus- ja uskottavuusjoukot	76
5.1.1 Simuloidut aineistot	78
5.1.2 Saatujen tulosten arviointia	114

5.2 Weibull-prosessin parametrien luottamus- ja uskottavuus- joukot	116
5.2.1 Simuloidut aineistot	118
5.2.2 Saatujen tulosten arviointia	148
Loppupäätelmät	150
Lähdeluettelo	152
LIITE 1. Estimoinnin reunaehdoja	
LIITE 2. Sovitteen hyvyyden testaus	
LIITE 3. Todistuksia	

1. Johdanto

Kohteesta kerättyjen vikatiетоjen avulla pyritään saamaan tietoa kohteen vikaantumiskäyttäytymisestä. Vikatiетоjen jalostus kvantitatiiviseksi informaatioksi edellyttää tilastollisten menetelmien käyttöä. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että pyritään löytämään vikatiетоihin mahdollisimman hyvin sopiva tilastollinen malli ja estimoimaan tämän mallin parametrit. Tämän vaiheen apuneuvoina ovat erilaiset graafiset menetelmät ja tilastolliset testit. Kun sopiva malli on löytynyt ja parametrit estimoitu, on käytössä kohdetta kuvaava matemaattinen malli, jonka avulla voidaan laskea erilaisia tunnuslukuja ja tietyin rajoituksin ennustaa kohteen tulevaa käyttäytymistä. Perusideana on siis tiivistää vikatiето sellaiseksi informaatioksi, jota voidaan hyödyntää esimerkiksi kunnossapidon suunnittelussa tai kohteen simuloinnissa.

Perinteisesti käyttövarmuuslaskennassa käytetyt mallit ovat olleet elinaika-jakaumia, kuten eksponenttijakauma tai Weibull-jakauma. Jakaumamallit ovat kuitenkin osoittautuneet riittämättömiksi silloin, kun kohteen vikaantumiskäyttäytyminen muuttuu ajan myötä. Esimerkki tällaisesta kohteesta on ns. huonontuva järjestelmä, jossa vikaantumisten väliset ajat lyhenevät ajan kuluessa. Paremmat ratkaisut tarjoavat tällöin stokastisiin prosesseihin perustuvat mallit, jotka kykenevät ottamaan huomioon kohteiden vikaantumiskäyttäytymisessä tapahtuvat muutokset. Eräs tällainen malli on ns. Weibull-prosessi.

Käytännössä esiintyy usein tilanteita, joissa jokin osa vaihdetaan vaikka se olisikaan vielä vikaantunut. Näin voi käydä esimerkiksi silloin, kun jokin kohde on niin hankalasti huollettavissa, että kun yksi osa vikaantuu, niin vaihdetaan samalla muutkin. Vastaava tilanne syntyy myös silloin, kun noudatetaan ennalta tehtyä huoltosuunnitelmaa, jolloin vaihdetaan/huolletaan osia suunnitelman mukaisesti vaikka ne eivät olisikaan vielä vikaantuneet. Tällaisesta kohteesta kerätyt vikatiेतodot tulevat siis väistämättä koostumaan sekä tiedoista, milloin jokin osa on vikaantunut, sekä tiedoista, milloin jokin osa on vaihdettu ennen vikaantumistaan (vikatiेतodoilla tarkoitetaan siis hieman laajempaa joukkoa kuin varsinaiset vikaantumistiedot). Jälkimmäisiä kutsutaan sensuroiduiksi havainnoiksi. Sensuroidulla tiedolla tarkoitetaan siis eräänlaista puutteellista tietoa

Tilastolliset menetelmät sisältävät aina epävarmuutta, jota aiheuttaa mm. satunnaisvaihtelu. On intuitiivisesti selvää, että puutteellinen tieto lisää kohteesta tehtävien päätelmien epävarmuutta. Sensuroinnin vaikutuksen tutkiminen tilastollisen epävarmuuden lisääjänä onkin tämän työn keskeisiä tehtäviä. Tutkimus suoritetaan simuloidusta datasta. Simuloinnin etuna on se, että päästään kontrolloimaan sensurointia halutulla tavalla, ja havainnot ovat “puhtaita” sekoittavista tekijöistä kuten mittausvirheet ja olosuhteiden muutokset.

2. Tavoite

Työn tärkein tavoite on tutkia sensuroinnin vaikutusta vikadata-analyysin tuloksiin. Eräänlaisena testattavana hypoteesina voidaan pitää väitettä, jonka mukaan sensurointi kadottaa informaatiota ja näin ollen vaikeuttaa vikadatasta tehtäviä päätelmiä ja lisää päätelmien tilastollista epävarmuutta. Tätä väitettä tutkitaan simuloitujen aineistojen avulla. Työssä pyritään erityisesti selvittämään kuinka paljon sensurointi kadottaa informaatiota. Muita tavoitteita on tehdä selväksi jakauma- ja prosessimallin erot ja tiettyjen erikoistapausten yhtäläisyydet, esitellä mallien perusominaisuudet ja antaa tarvittavat kaavat mallien parametrien ja parametrien luottamus- ja uskottavuusjoukkojen laskemiseksi.

Työ etenee seuraavasti:

Luvussa 3 annetaan yleisiä määritelmiä sekä esitellään käytettyjä menetelmiä. Aluksi esitellään kaksi tilastollista perusmallia, jakauma ja prosessi. Näitä käsitellään yleisellä tasolla tarkoituksena antaa yleiskuva siitä, millaisiin tapauksiin niiden käyttö soveltuu, sekä yleiskuva mallien perusominaisuuksista. Seuraavaksi käsitellään sensurointia ensin ilmiönä, jonka jälkeen esitellään yleisimmät sensurointityypit. Luvun lopuksi käydään läpi uskottavuusmenetelmien periaatteita sekä niiden käyttöä jakauma- ja prosessimallien parametrien estimoinnissa.

Luvussa 4 tarkennetaan luvun 3 aihepiiriä niihin kahteen tilastolliseen malliin, joista varsinaisesti ollaan kiinnostuneita. Nämä mallit ovat Weibull-jakauma ja Weibull-prosessi. Weibull-mallien ominaisuudet esitellään ja uskottavuusmenetelmät tarkennetaan niitä vastaaviksi.

Luvussa 5 päästään varsinaiseen asiaan eli tutkimaan sensuroinnin vaikutusta Weibull-mallien parametrien estimoinnissa. Erityisesti ollaan kiinnostuneita siitä, kuinka sensurointi vaikuttaa parametrien estimaattien luottamus- ja uskottavuusjoukkojen kokoon. Jakauman kohdalla tutkitaan myös estimoidun jakauman odotusarvon ja varianssin käyttäytymistä. Tutkimusmenetelmänä on simulointi.

Luvussa 6 on loppupäätelmien aika. Siinä arvioidaan työssä saavutettujen tuloksia ja niiden mahdollista hyötykäyttöä, sekä pohditaan jatkotarkastelujen mahdollisuuksia.

Liitteissä käsitellään asioita, jotka eivät suoranaisesti kuulu työn aihepiiriin, mutta joita ei kuitenkaan voida jättää täysin huomiottakaan. Liite 1 paneutuu estimoinnin reunaehtoihin, eli asioihin, jotka vikadata-analyysin kannalta ovat aivan keskeisiä, jotta estimoinnin tulokset olisivat mielekkäitä. Liitteessä 2 käydään pikaisesti läpi soviteen hyvyyden testausta, eli annetaan keinoja, joilla voidaan estimoinnin jälkeen tutkia estimoidun mallin yhteensopivuutta havaintoaineiston kanssa. Liitteessä 3 käsitellään muutama pitkäkö todistus, joita ei tilansäästön vuoksi käsitellä itse tekstissä.

3. Määritelmiä ja matemaattisia menetelmiä

Jotta esitys olisi mahdollisimman selkeä ja johdonmukainen, on heti aluksi syytä määritellä käsitteet, joista puhutaan, sekä kiinnittää niistä käytettävät merkintätavat. Koska tarkoituksena on tutkia erityisesti aiheita, jotka liittyvät luotettavuustekniikkaan, pyritään puhumaan luotettavuustekniikan kielellä ja käyttämään sovellusalalla vakiintuneita merkintätapoja. Merkintöjen osalta seurataan soveltuvien osin Ascherin ja Feingoldin (1984) kirjan esitystä. Etenkin seuraavat käsitteet ovat jatkoa ajatellen keskeisiä:

yksikkö	ei-korjattava osa tai vastaava, joka vikaannuttuaan vaihdetaan uuteen
järjestelmä	vähintään kahdesta yksiköstä koostuva kokonaisuus
korjattava järjestelmä	n :stä ($n \geq 2$) yksiköstä koostuva järjestelmä, joka voidaan sen vikaannuttua saattaa takaisin toimintakuntoon vaihtamalla enintään $n-1$ yksikköä uusiin (korjaus voidaan tehdä myös muulla tavoin kuin vaihtamalla osia)
ei-korjattava järjestelmä	järjestelmä, joka on vikaannuttuaan korvattava kokonaan uudella, ts. kaikki n osaa on vaihdettava

Koska ei-korjattava järjestelmä voidaan matemaattisessa mielessä rinnastaa yksikköön, tarkoitetaan jatkossa järjestelmällä korjattavaa järjestelmää, ellei erikseen muuta mainita.

yksikön “huonontuminen” (part wearout)	käyttöajan kasvaessa yksikön vikaantumisen todennäköisyys kasvaa
yksikön “paraneminen” (part burn-in)	käyttöajan kasvaessa yksikön vikaantumisen todennäköisyys pienenee

“kulumaton” yksikkö käyttöajan kasvaessa yksikön vikaantumisen todennäköisyys pysyy samana

On syytä kiinnittää huomiota “wearout” ja “burn-in” ilmiöiden tulkintaan. Huonontumisella ja paranemisella ei näissä tapauksissa tarkoiteta yksikön sisäisten ominaisuuksien muuttumista ajan kuluessa, vaan nämä ilmiöt tulee käsittää suhteessa muihin samankaltaisiin yksiköihin. Esimerkiksi yksikön paranemisella tarkoitetaan sitä, että tietyn ajan kuluttua heikot yksiköt ovat karsiutuneet pois ja ne, jotka ovat selviytyneet, tiedetään nyt vahvoiksi yksiköiksi. Näiden yksiköiden vikaantumisen todennäköisyyden pieneneminen johtuu siis saadusta lisätiedosta, eikä siitä, että yksikkö jollain mystisellä tavalla itsessään paranisi. Kyseessä on siis eräänlainen “heikot pois” -ajattelu.

huonontuva järjestelmä (sad system) järjestelmä, jossa vikaantumisten väliset ajat lyhenevät järjestelmän iän kasvaessa

parantuva järjestelmä (happy system) järjestelmä, jossa vikaantumisten väliset ajat kasvavat ajan myötä

stationaarinen järjestelmä (stationary system) järjestelmä, jossa vikaantumisten väliset ajat keskimäärin samoina

Kun kyseessä on järjestelmä, tarkoitetaan huonontumisella ja paranemisella sitä, että järjestelmä todella muuttuu huonommaksi tai paremmaksi. Paraneminen voi johtua esimerkiksi siitä, että alussa järjestelmälle joudutaan “näppituntumalla” hakemaan oikeat säädöt ja huonot säädöt alussa aiheuttavat vikaantumisia. Huonontuminen voi johtua vaikkapa siitä, että järjestelmän osat kuluvat käytössä ja pitkään toiminnassa ollut järjestelmä sisältää runsaasti näitä kuluneita osia.

3.1 Merkintöjä

Yleiset

t	kalenteriaika, riippuvainen määritelmästä origosta (yleensä origona hetki $t = 0$)
$E [\cdot]$	suluissa olevan satunnaismuuttujan odotusarvo
$D^2 [\cdot]$	suluissa olevan satunnaismuuttujan varianssi
Δ	positiivinen vakio
$I (\cdot)$	informaatiomatriisi (tai informaatiofunktio, jos kyseessä on 1x1 -matriisi)
$L (\cdot ; \cdot)$	uskottavuusfunktio
$l (\cdot ; \cdot)$	logaritminen uskottavuusfunktio
$L_C (\cdot ; \cdot)$	ehdollinen uskottavuusfunktio
$l_C (\cdot ; \cdot)$	logaritminen ehdollinen uskottavuusfunktio
$S (\cdot ; \cdot)$	suhteellinen uskottavuusfunktio
$s (\cdot ; \cdot)$	logaritminen suhteellinen uskottavuusfunktio
$L_{prof} (\cdot ; \cdot)$	profiiliuskottavuusfunktio
$S_{prof} (\cdot ; \cdot)$	suhteellinen profiiliuskottavuusfunktio
$s_{prof} (\cdot ; \cdot)$	logaritminen suhteellinen profiiliuskottavuusfunktio
$\chi^2_{\sigma}(\text{dim})$	chi ² -jakauman σ -fraktiili vapausasteina dim
q_{σ}	$N(0,1)$ -jakauman σ -fraktiili

Yksiköille määritellyjä termejä

X	yksikön elinaikaa kuvaava satunnaismuuttuja
x	yksikön havaittu elinaika

Useissa tapauksissa on myös

$X = (X_1, \dots, X_n)$	n :n yksikön elinaikoja kuvaavista satunnaismuuttujista koostuva vektori
$x = (x_1, \dots, x_n)$	n :n yksikön havaituista elinajoista koostuva vektori

$F_X(x)$	X :n kertymäfunktio, jatkuva ja derivoituva ellei erikseen muuta mainita
$f_X(x)$	X :n tiheysfunktio
$h_X(x)$	X :n suhteellinen vikataajuusfunktio $R_X(x)$ X :n selviytymisfunktio (toimintatodennäköisyys)
$r_X(x)$	X :n keskimääräinen jäljellä oleva elinaika
μ	X :n odotusarvo

Järjestelmille määriteltyjä termejä

T_i	järjestelmän i :nnettä vikaantumista kuvaava satunnaismuuttuja
t_i	järjestelmän i :s havaittu vikaantumisaika
X_i	järjestelmän i :nnettä väliaikaa kuvaava satunnaismuuttuja, so. vikavälin (T_{i-1}, T_i) pituus (ei pidä sekoittaa yksikön kohdalla määriteltyyn elinaikamuuttujaan)
x_i	järjestelmän i :s havaittu väliaika, so. havaitun vikavälin (t_{i-1}, t_i) pituus
$N(t)$	vikaantumisten lukumäärä aikavälillä $(0, t]$
$\{N(t), t \geq 0\}$	kokonaislukuarvoinen laskuri prosessi
A	prosessin arvojoukko
$V(t)$	vikaantumisten odotettu lukumäärä aikavälillä $(0, t]$
$v(t)$	$V'(t)$; prosessin absoluuttinen vikataajuusfunktio (ROCOF)
λ	vakiovikataajuus, so. HPP:n ROCOF

Lyhenteet

CDF	kertymäfunktio (Cumulative Distribution Function)
DFR	pienenevä (suhteellinen) vikataajuus (Decreasing Failure Rate)
FOM	suhteellinen vikataajuus (Force Of Mortality)
HPP	homogeeninen Poisson prosessi (Homogenous Poisson Process)
IFR	kasvava (suhteellinen) vikataajuus (Increasing Failure Rate)
MTTF	keskimääräinen vikaantumisaika (Mean Time To Failure)

NHPP	epähomogeeninen Poisson prosessi (Nonhomogenous Poisson Process)
PDF	tiheysfunktio (Probability Density Function)
ROCOF	prosessin absoluuttinen vikataajuus (Rate of OCCurrence Of Failures)

3.2 Todennäköisyysjakaumat, malleja yksiköille

(Ascher ja Feingold (1984))

Yksikön vikataajuus (FOM) ja tiheysfunktio (PDF)

Määritellään X satunnaismuuttujana, joka kuvaa aikaa yksikön käyttöönotosta sen vikaantumiseen. Tällöin $F_X(x) := \Pr\{X \leq x\} :=$ kertymäfunktio, joka määrittelee X :n jakauman. Oletetaan, että F on kaikkialla jatkuva ja derivoituva. **Suhteellinen vikataajuusfunktio** määritellään kaavalla

$$(3.2.1) \quad h_X(x) := \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} := X \text{ :n FOM,}$$

missä määritellään tiheysfunktio

$$f_X(x) := F'_X(x)$$

ja selviytymisfunktio (toimintatodennäköisyys)

$$R_X(x) := 1 - F_X(x) := \Pr\{\text{yksikköselviytyy ainakin hetkeen } x \text{ saakka}\}$$

Selviytymisfunktion määritelmästä seuraa

$$(3.2.2) \quad F'_X(x) = -R'_X(x),$$

Nyt kaavoista (3.2.1) ja (3.2.2) saadaan

$$(3.2.3) \quad h_X(x) = \frac{-R'_X(x)}{R_X(x)}$$

$$\Leftrightarrow R'_X(x) = -h_X(x)R_X(x).$$

Ratkaisemalla differentiaaliyhtälö (3.2.3) saadaan selviytymisfunktiolle muoto

$$(3.2.4) \quad R_X(x) = \exp\left(-\int_0^x h_X(u)du\right)$$

ja kertymäfunktiolle muoto

$$(3.2.5) \quad F_X(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x h_X(u)du\right).$$

Suhteellinen vikataajuusfunktio määrää siis yksikäsitteisesti sekä selviytymis-, kertymä-, että tiheysfunktion.

Tulkinta FOM:lle voidaan antaa seuraavan yhtälön avulla:

$$(3.2.6) \quad h_X(x)dx = \Pr\{x \leq X \leq x + dx \mid X \geq x\}$$

$h_X(x)dx$ on siis ehdollinen todennäköisyys sille, että populaatiosta poimittu yksikkö, joka asetetaan toimintaan hetkellä $x=0$ ja jonka tiedetään selviytyneen ainakin hetkeen x , vikaantuu välillä $[x, x + dx]$.

Elandt-Johnson ja Johnson (1980) perustelevat $h_X(x)$:lle käytettäväksi nimitystä suhteellinen vikataajuus, koska hetkellä x $F_X(x)$:n derivaatta jaetaan todennäköisyydellä selviytyä hetkeen x . Tiheysfunktio $f_X(x) := F'_X(x)$ puolestaan on absoluuttinen vikataajuus, koska se määritellään derivaattana ilman normalisointia.

Usein on esitetty myös tulkinta, jonka mukaan FOM on ehdollinen PDF. Tätä pitävät kuitenkin virheellisenä käsityksenä mm. Ascher ja Feingold (1984) sekä Badenius (1970).

Keskimääräinen vikaantumisaika

(MTTF mean time to failure)

Tarkastellaan populaatiota, jonka yksiköiden vikaantumisjakauman määrittelevät CDF F ja PDF f . Populaation yksikön keskimääräinen vikaantumisaika MTTF on luonnollisesti yksikön elinajan odotusarvo, eli

$$(3.2.7) \quad \text{MTTF} := E[X] = \int_0^{\infty} xf(x)dx := \mu$$

Seuraavissa määritelmissä puhutaan yksikön huonontumisesta ja parantumisesta. Näiden termien intuitiiviset tulkinnat saattavat olla sellaisinaan hieman harhaanjohtavia, joten selvennetään hieman niiden merkitystä.

Yksikön huonontumisella ei tarkoiteta yksinomaan sitä, että yksikkö itsessään jotenkin huononisi esimerkiksi fyysikaalisen kulumisen vuoksi, vaan sitä, että odotettavissa oleva jäljellä oleva elinaika pienenee sitä mukaa kun yksikkö ikääntyy.

Parantumisella puolestaan ei tarkoiteta sitä, että yksikkö käytössä jostain syystä paranisi, vaan sitä, että odotettavissa oleva jäljellä oleva elinikä kasvaa sitä mukaa kun yksikkö ikääntyy. Esimerkiksi ihmisen voisi lapsuus- ja nuoruusaikanaan ajatella olevan tällainen “vahvistuva yksikkö”: vastasyntyneen odotettavissa oleva elinikä on pienempi kuin esimerkiksi viisivuotiaiden. Tämä ei johdu siitä, että ihminen ensimmäisen viiden vuoden aikana jotenkin ratkaisevasti paranisi vaan siitä, että tulevaisuus näyttää valoisammalta kun lapsikuolleisuuden riskikohdat on ohitettu.

Yksikön “huonontuminen” (huom. tn-mielessä, ks. edellä)
(part wearout)

Määritellään yksikön heikentyminen “puoliaidosti” vähenevänä keskimääräisenä jäljelläolevana elinaikana. (Puoliaidolla tarkoitetaan symbolia \leq (tai \geq) joka pätee niin, että epäyhtälö on aito ainakin yhdessä tapauksessa.)

Satunnaismuuttujan X keskimääräinen jäljellä oleva elinaika määritellään

$$(3.2.8) \quad r_X(x) := E[X - x | X > x] = \frac{\int_x^\infty R_X(u) du}{R_X(x)} = \frac{\int_x^\infty (1 - F_X(u)) du}{1 - F_X(x)}$$

Tämä on siis jäljellä olevan elinajan odotusarvo kun tiedetään, että yksikkö on selviytynyt hetkeen x . Sanotaan, että $F_X(x)$ on heikentymisjakauma, jos

$$(3.2.9) \quad r_X(x_i) \leq r_X(x_j),$$

kun $x_i > x_j \geq 0$ ja epäyhtälö on aito ainakin yhdelle $x_i > x_j > 0$. Tätä aihetta käsittelevät perusteellisemmin Ascher ja Feingold (1984).

Yksikön “parantuminen” (huom. tn-mielessä, ks. edellä)
(part burn-in)

Määritellään yksikön parantuminen vastaavalla tavalla kuin heikentyminen. Sanotaan, että $F_X(x)$ on vahvistumisjakauma, jos

$$(3.2.10) \quad r_X(x_i) \geq r_X(x_j),$$

kun $x_i > x_j \geq 0$ ja epäyhtälö on aito ainakin yhdelle $x_i > x_j > 0$.

3.3 Stokastiset prosessit, malleja järjestelmille

Stokastinen prosessi eli satunnaisprosessi on yksinkertaisesti kokoelma satunnaismuuttujia.

Merkitään:

aikajoukko $t = \{0, 1, \dots\}$ (\mathbf{Z}_+) - diskreetti
 $t = [0, \infty)$ (\mathbf{R}_+) - jatkuva
(tai jokin muu \mathbf{Z}_+ :n tai \mathbf{R}_+ :n osajoukko)

arvojoukko A , $N(t) \in A$, usein $A = \{0, 1, \dots\}$, $A = \mathbf{Z}_+$ tai $A = \mathbf{R}_+$

Nyt voidaan määritellä stokastinen prosessi tarkemmin:

Määritelmä 3.3.1

Olkoon $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ todennäköisyyskenttä (ks. Esim. Elfving & Tuominen (1990)). Kokoelma (X_t) tällä todennäköisyyskentällä määriteltyjä satunnaismuuttujia on stokastinen prosessi.

Jos $t = \mathbf{Z}_+$, niin prosessi on diskreettiaikainen,

$t = \mathbf{R}_+$, niin prosessi on jatkuva-aikainen.

Kuvausta $X_\bullet(\omega)$ sanotaan prosessin poluksi.

3.3.1 Laskuriprosessit

(Hoyland & Rausand (1984))

Tarkastellaan järjestelmää, joka asetetaan toimintaan hetkellä $t = 0$. Järjestelmän ensimmäinen vikaantuminen sattuu hetkellä T_1 , jolloin järjestelmä joko korvataan uudella tai se korjataan toimintakuntoon. Ajatellaan korjausajan olevan niin lyhyt, että sen voi jättää huomiotta. Toinen vikaantuminen sattuu hetkellä T_2 ja niin edelleen. Näin saamme joukon vikaantumisaikoja T_1, T_2, T_3, \dots . Olkoon X_i , $i = 1, 2, \dots$ vikaantumisten $i - 1$ ja i välinen aika (oletetaan $T_0 = 0$). X_i :ta kutsutaan i :nneksi **väliajaksi** (vikaväliksi). X_i :t eivät yleisesti ottaen ole riippumattomia ja samoin jakautuneita. Poikkeuksen tekee tilanne, jossa järjestelmä korvataan vikaantumisen jälkeen uudella tai korjataan uutta vastaavaksi. Riippumattomuus edellyttää lisäksi, että toimintaolosuhteet pysyvät vakiona koko järjestelmän toiminta-ajan.

Erityisen mielenkiinnon kohteena on satunnaismuuttuja $N(t)$, vikaantumisten lukumäärä aikavälillä $(0, t]$. Stokastista prosessia $\{N(t), t \geq 0\}$ kutsutaan **laskuriprosessiksi**.

Seuraavan täsmällisemmän määritelmän laskuriprosessille antaa Ross (1983):

Määritelmä 3.3.2

Stokastinen prosessi $\{N(t), t \geq 0\}$ on laskuriprosessi, jos $N(t)$ toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $N(t) \geq 0$
2. Prosessi saa arvokseen luonnollisia lukuja eli $A = \mathbf{N}_+$
3. Jos $t_1 < t_2$, niin $N(t_1) \leq N(t_2)$

4. Kun $t_1 < t_2$, niin $[N(t_2) - N(t_1)]$ edustaa välillä (t_1, t_2) sattuneiden vikaantumisten lukumäärää

Määritellään joitakin jatkossa tarvittavia käsitteitä:
(Hoyland & Rausand)

Riippumattomat lisäykset

Laskuriprosessilla $\{N(t), t \geq 0\}$ sanotaan olevan riippumattomat lisäykset, jos $[N(s_2) - N(s_1)]$ ja $[N(t_2) - N(t_1)]$ ovat riippumattomia, kun $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t_1 \leq t_2$. Tämä tarkoittaa sitä, että vikaantumisten lukumäärään jollakin tietyllä aikavälillä eivät vaikuta vikaantumisten lukumäärät aikaisemmillä väleillä (edellyttäen tietenkin, että välit ovat erilliset). Vaikka järjestelmässä sattuisikin huomattavan paljon vikaantumisia jollakin aikavälillä, ei näistä voida tehdä päätelmiä koskien tulevien vikaantumisten jakaamaa.

Stationaariset lisäykset

Laskuriprosessilla $\{N(t), t \geq 0\}$ sanotaan olevan stationaariset lisäykset, jos $[N(t_2) - N(t_1)]$ ja $[N(t_2 + \Delta t) - N(t_1 + \Delta t)]$ ovat samoin jakautuneita, kun $0 \leq t_1 \leq t_2$. Tämä tarkoittaa sitä, että vikaantumisten lukumäärä riippuu vain aikavälin pituudesta (eikä esimerkiksi sen etäisyydestä origoon, so. hetkeen $t = 0$).

Stationaarinen prosessi

Laskuriprosessin $\{N(t), t \geq 0\}$ sanotaan olevan stationaarinen (tai homogeeninen), jos sillä on stationaariset lisäykset.

Epästationaarinen prosessi (epähomogeeninen prosessi)

Laskuriprosessin $\{N(t), t \geq 0\}$ sanotaan olevan epästationaarinen (epähomogeeninen), jos se ei ole stationaarinen eikä siitä ajan mittaan tulekaan stationaarista.

Yksinkertainen prosessi

Laskuriprosessin $\{N(t), t \geq 0\}$ sanotaan olevan yksinkertainen, jos

$\Pr[N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2] = o(\Delta t)$, kun Δt on pieni. $o(\Delta t)$ on Δt :n funktio,

jolla on ominaisuus $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$. Käytännössä tämä merkitsee sitä, että

järjestelmässä ei voi sattua kahta tai useampaa vikaantumista samanaikaisesti.

Jatkossa stokastisella prosessilla tarkoitetaan yksinkertaista prosessia ellei erikseen muuta mainita.

Absoluuttinen vikataajuus, ROCOF

(the Rate of OCCurrence Of Failures)

Laskuriprosessin absoluuttinen vikataajuus (ROCOF) hetkellä t määritellään

$$(3.3.1) \quad v(t) := V'(t) = \frac{d}{dt} E [N(t)] \quad ,$$

missä $V(t) = E [N(t)]$ on vikaantumisten keskimääräinen lukumäärä aikavälillä $(0, t]$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$(3.3.2) \quad v(t) = V'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E [N(t + \Delta t) - N(t)]}{\Delta t} \quad .$$

Kun Δt on pieni, pätee edelleen

$$(3.3.3) \quad v(t) \approx \frac{E [N(t + \Delta t) - N(t)]}{\Delta t}$$

$$= \frac{\text{vikaantumisten keskimääräinen lkm aikavälillä } (t, t + \Delta t]}{\Delta t}$$

Tämän vuoksi $v(t)$:n luonnollinen estimaattori on

$$(3.3.4) \quad \hat{v}(t) = \frac{\text{vikaantumisten lkm aikavälillä } (t, t + \Delta t]}{\Delta t}$$

jollekin sopivalle Δt :lle. Tästä seuraa, että ROCOFin (eli $v(t)$:n) voidaan ajatella olevan vikaantumisten keskimääräinen lukumäärä aikayksikköä kohden hetkellä t .

Kun tarkastellaan yksinkertaista prosessia, on todennäköisyys kahdelle tai useammalle vikaantumiselle välillä $(t, t + \Delta t]$ mitättömän pieni, kun Δt on pieni. Tämän vuoksi pienelle Δt :lle voidaan olettaa

$$(3.3.5) \quad N(t + \Delta t) - N(t) = 0 \text{ tai } 1.$$

Näin ollen vikaantumisten keskimääräinen lukumäärä välillä $(t, t + \Delta t]$ on likimäärin sama kuin vikaantumisen todennäköisyys välillä $(t, t + \Delta t]$, ja

$$(3.3.6) \quad v(t) \approx \frac{\text{vikaantumisen todennäköisyys välillä } (t, t + \Delta t]}{\Delta t}.$$

(3.3.6):sta seuraa, että $v(t)\Delta t$ voidaan tulkita vikaantumisen todennäköisyydeksi välillä $(t, t + \Delta t]$.

Tässä esityksessä käsitellään kolmea tavallista laskuri-prosessia. **Homogeenisessa Poisson-prosessissa (HPP)** tapahtumien väliajat ovat toisistaan riippumattomia ja samoin eksponentiaalisesti jakautuneita. Sekä **uusiutumisprosessi** että **epähomogeeninen Poisson-prosessi (NHPP)** ovat homogeenisen Poisson-prosessin yleistyksiä ja ne sisältävät HPP:n erikoistapauksenaan. Uusiutumisprosessi on laskuri-prosessi, jossa tapahtumien väliajat ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Kun kyseessä on korjattavasta järjestelmä, tarkoitetaan tällä sitä, että vikaantumisten jälkeen järjestelmä palautuu **uutta vastaavaan kuntoon** (as good as new). Epähomogeeninen Poisson-prosessi eroaa HPP:sta siinä, että prosessin intensiteetti voi muuttua ajan funktiona eikä se siis ole vakio. Tästä seuraa, että NHPP:ssa tapahtumien väliajat eivät ole sen enempää riippumattomia kuin samoin jakautuneitakaan. NHPP:ta käytetään usein sellaisten järjestelmien mallintamiseen, joihin sovelletaan ns. **vähimmäiskorjausstrategiaa**. Vähimmäiskorjauksella tarkoitetaan sellaista toimenpidettä, jossa järjestelmä korjataan vikaantumisen jälkeen vain juuri takaisin toimintakuntoon. Korjauksen jälkeen järjestelmä jatkaa toimintaansa kuin mitään ei olisi tapahtunutkaan. Järjestelmän toimintatodennäköisyys on siis sama juuri ennen vikaantumista ja välittömästi sen jälkeen. Usein sanotaan, että järjestelmä korjataan **vanhaa vastaavaan kuntoon** (as bad as old). Vähimmäiskorjausstrategiaa käsittelevät mm. Aven (1983) ja Ascher ja Feingold (1984).

Uusiutumisprosessi ja epähomogeeninen Poisson-prosessi edustavat korjausstrategioiden kahta äärilaitaa: Korjausta uutta vastaavaan kuntoon ja korjausta vanhaa vastaavaan kuntoon. Suurin osa korjaustoimenpiteistä on kuitenkin jotakin tältä väliltä. Näitä välimuotoja kutsutaan **epätäydellisiksi**

korjauksiksi (imperfect repair). Erään tunnetuimmista epätäydellisen korjauksen malleista esittelivät Brown ja Proschan (1983). Mallin idea on siinä, että järjestelmä korjataan uutta vastaavaan kuntoon todennäköisyydellä p ja vanhaa vastaavaan kuntoon todennäköisyydellä $1 - p$. Lisää viitteitä aiheeseen antaa Akersten (1991); tässä esityksessä tätä mallia ei kuitenkaan käsitellä.

HOMOGEENINEN POISSON-PROSESSI (HPP)

Seuraavan määritelmän homogeeniselle Poisson-prosessille antaa Ross (1983):

Määritelmä 3.3.3a

Laskuri-prosessin $\{N(t), t \geq 0\}$ sanotaan olevan homogeeninen Poisson-prosessi (HPP) intensiteettinä $\lambda (> 0)$, jos

1. $N(0) = 0$
2. Prosessilla on stationaariset ja riippumattomat lisäykset
3. $\Pr[N(t + \Delta t) - N(t) = 1] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$
4. $\Pr[N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2] = o(\Delta t)$

Rossin (1983) mukaan vaihtoehtoinen määritelmä edelliselle on

Määritelmä 3.3.3b

Laskuri-prosessin $\{N(t), t \geq 0\}$ sanotaan olevan homogeeninen Poisson-prosessi (HPP) intensiteettinä $\lambda (> 0)$, jos

1. $N(0) = 0$
2. Prosessilla riippumattomat lisäykset
3. Vikaantumisten lukumäärä millä tahansa aikavälillä, jonka pituus on t , on Poisson (λt) -jakautunut.

Homogeenisella Poisson-prosessilla on mm. seuraavat ominaisuudet:

- HPP on yksinkertainen laskuri-prosessi riippumattomin ja stationaarisin lisäyksin.
- Prosessin absoluuttinen vikataajuus (ROCOF) on vakio ja siis riippumaton ajasta.
- Vikaantumisten lukumäärä aikavälillä $(t_1, t_2]$ on Poisson jakautunut keskiarvolla $\lambda (t_2 - t_1)$.
- Vikaantumisten keskimääräinen lukumäärä aikavälillä $(t_1, t_2]$ on

$$(3.3.7) \quad V(t_2) - V(t_1) = E [N(t_2) - N(t_1)] = \lambda (t_2 - t_1).$$

- Vikaantumisten väliajat (vikavälit) ovat riippumattomia ja samalla tavalla eksponentiaalisesti jakautuneita satunnaismuuttujia keskiarvona $1/\lambda$.

- r :s vikaantumisaika $T_r = \sum_{i=1}^r X_i$ on $gamma(r, \lambda)$ -jakautunut

tiheysfunktiona

$$(3.3.8) \quad f(t) = \frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!} \lambda \exp(-\lambda t) \quad , t \geq 0.$$

UUSIUTUMISPROSESSI

Uusiutumisprosessi on stokastinen laskuri-prosessi, jossa väliajat ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Erotuksena homogeeniseen Poisson-prosessiin jakaumaa ei oleteta eksponentiaaliseksi. Toki se voi olla myös eksponenttijakauma, jolloin uusiutumisprosessi palautuu homogeeniseksi Poisson-prosessiksi. Seuraava esimerkki kuvaa tyypillistä tilannetta: Järjestelmä asetetaan toimintaan hetkellä $t = 0$. Kun tämä järjestelmä vikaantuu, se korvataan uudella tai korjataan uutta vastaavaan kuntoon. Kun järjestelmä vikaantuu taas, se korvataan uudella tai korjataan jne. Korjaus/korvausaika oletetaan niin pieneksi, että se voidaan jättää huomiotta. Näin saadaan joukko elinaikoja X_1, X_2, X_3, \dots jotka oletetaan riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi satunnaismuuttujiksi kertymäfunktiona

$$(3.3.9) \quad F_X(x) = \Pr [X_i \leq x] \quad , \quad x > 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Tämäntyyppistä prosessia kutsutaan yksinkertaiseksi uusiutumisprosessiksi. Havaittuja tapahtumia (esim. vikaantumiset) kutsutaan uusiutumisiksi ja tapahtumien välisiä aikoja uusiutumisajoiksi tai väliajoiksi. Kertymä-funktio $F_X(x)$ määrää uusiutumisprosessin taustalla olevan jakauman.

Mielenkiinnon kohteina ovat usein seuraavat uusiutumisprosessiin liittyvät muuttujat:

- Aika r :nteen uusiutumiseen

$$(3.3.10) \quad T_r = X_1 + X_2 + \dots + X_r = \sum_{i=1}^r X_i$$

- Uusiutumisten lukumäärä aikavälillä $(0, t]$,

$$(3.3.11) \quad N(t) = \max\{r \mid T_r \leq t\}$$

Uusiutumisten lukumäärä mielivaltaisella aikavälillä $(t_1, t_2]$ on $N(t_2) - N(t_1)$.

- Uusiutumiskeskitys

$$(3.3.12) \quad V(t) = E [N(t)]$$

$V(t)$ on siis keskimääräinen vikaantumisten lukumäärä aikavälillä $(0, t]$.

- Uusiutumistiheys

$$(3.3.13) \quad v(t) = \frac{d}{dt} V(t)$$

Uusiutumistiheys on itse asiassa uusiutumisprosessin absoluuttinen vikataajuus, eli se yhtyy edellä määriteltyyn ROCOFiin. Keskimääräinen vikaantumisten lukumäärä aikavälillä $(t_1, t_2]$ on tällöin

$$(3.3.14) \quad V(t_2) - V(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt .$$

Yksityiskohtainen esitys uusiutumisprosesseista on esimerkiksi teoksessa Cox (1962).

EPÄHOMOGEENINEN POISSON-PROSESSI

Hoyland ja Rausand (1994) määrittelevät epähomogeenisen Poisson-prosessin seuraavasti:

Määritelmä 3.3.4

Laskuriprosessin $\{N(t), t \geq 0\}$ sanotaan olevan epähomogeeninen Poisson-prosessi (NHPP) absoluuttisena vikataajuusfunktiona $v(t)$, kun $t \geq 0$, jos

1. $N(0) = 0$
2. Prosessilla on riippumattomat lisäykset
3. $\Pr [N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2] = o(\Delta t)$, so. järjestelmässä ei voi sattua kahta tai useampaa tapahtumaa samanaikaisesti
4. $\Pr [N(t + \Delta t) - N(t) = 1] = v(t)\Delta t + o(\Delta t)$

Epähomogeenisessa Poisson-prosessissa prosessin absoluuttisen vikataajuuden (ROCOF) sallitaan olla ajan funktio. Prosessin kumulatiivinen intensiteetti määritellään (vrt. 3.3.14)

$$(3.3.15) \quad V(t) := \int_0^t v(u) du.$$

On syytä huomata, että epähomogeenisen prosessin määritelmään ei sisälly vaatimusta stationaarisista lisäyksistä. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että vikaantumisia esiintyy toisina aikoina todennäköisemmin kuin toisina, eikä vikaantumisten väliajoille tämän vuoksi voida olettaa sen enempiä riippumattomuutta kuin samoin jakautuneisuuttakaan. On selvää, että tilastollisia malleja, jotka perustuvat oletukselle havaintojen riippumattomuudesta ja samoin jakautuneisuudesta, ei voida soveltaa epähomogeeniseen Poisson-prosessiin.

Epähomogeenista Poisson-prosessia käytetään usein mallintamaan prosessia silloin, kun vikaantumisten väliajat näyttäisivät noudattavan jotakin monotonista trendiä. Tällaisia järjestelmiä ovat ajan mittaan **parantuvat järjestelmät** (happy system) ja ajan mittaan **huonontuvat järjestelmät** (sad system). Riippumattomien lisäysten oletuksesta tiedetään, että vikaantumisten lukumäärä jollakin tietyllä aikavälillä (s, t) ei riipu vikaantumisten lukumäärästä ja väliajoista ennen hetkeä s . Käytännön seuraus tästä oletuksesta on se, että järjestelmän vikaantumistodennäköisyys on täsmälleen sama juuri ennen vikaantumista ja heti sen jälkeen. Kyseessä on siis edellä mainittu vähimmäiskorjausstrategia. Tämä ei selvästikään ole realistinen malli silloin, kun kauan toiminnassa olleet osat korvataan vikaantumisen jälkeen uusilla.

Jotta NHPP olisi täysin realistinen, tulisi uusien osien olla identtisiä vanhoihin nähden, eli niitä pitäisi ”vanhentaa” järjestelmän ulkopuolella, jotta ne olisivat toimintatodennäköisyydeltään samanarvoisia kuin vikaantuneet osat.

Käytännössä korjattavat järjestelmät koostuvat usein suuresta määrästä osia. Näin ollen voidaan päästä tyydyttävään approksimaatioon olettamalla, että järjestelmän vikaantumistodennäköisyys ennen vikaantumista on sama kuin korjauksen jälkeen, vaikka korjaus olisikin tehty siten, että vikaantunut vanha osa korvataan uudella. Tämä perustuu siihen, että osia on niin paljon ettei yhden vanhan vaihto uuteen juurikaan muuta koko järjestelmän käyttövarmuutta ja vähimmäis-korjauksen mallia voidaan pitää riittävän tarkkana. NHPP:ta käytettäessä ajatellaan korjattavan järjestelmän olevan eräänlainen ”musta laatikko” siinä mielessä, että ei olla kiinnostuneita siitä mitä järjestelmä pitää sisällään vaan siitä millainen sen käyttövarmuus on kokonaisuudessaan.

Seuraavassa joitakin tuloksia koskien epähomogeenista Poisson-prosessia:

Suoraan NHPP:n määritelmästä seuraa (ks. Ross (1983)), että vikaantumisten lukumäärä aikavälillä $(t_1, t_2]$ on Poisson jakautunut:

(3.3.16)

$$\Pr [N(t_2) - N(t_1) = n] = \frac{(V(t_2) - V(t_1))^n}{n!} \exp(-(V(t_2) - V(t_1))), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

missä $V(t)$ on prosessin kumulatiivinen intensiteetti (3.3.15). Keskimääräinen vikaantumisten lukumäärä aikavälillä $(t_1, t_2]$ on tällöin

$$(3.3.17) \quad E [N(t_2) - N(t_1)] = V(t_2) - V(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt .$$

Aika ensimmäiseen vikaantumiseen

Olkoon T_1 aika hetkestä $t = 0$ ensimmäiseen vikaantumiseen. T_1 :n selviytymisfunktio on

$$(3.3.18) R_{T_1}(t) = \Pr [T_1 > t] = \Pr [N(t) = 0] = \exp(-V(t)) = \exp\left(-\int_0^t v(t)dt\right).$$

Ensimmäisen uusiutumisaajan T_1 suhteellinen vikataajuus $h_{T_1}(t)$ on sama kuin koko prosessin absoluuttinen vikataajuus $v(t)$ (ROCOF). On kuitenkin syytä huomata näiden ilmauksien välinen ero: $h_{T_1}(t)\Delta t$ approksimoi todennäköisyyttä, että ensimmäinen vikaantuminen sattuu välillä $(t, t + \Delta t]$, ellei se ole sattunut sitä ennen, kun taas $v(t)\Delta t$ approksimoi todennäköisyyttä, että vikaantuminen (ei siis välttämättä ensimmäinen) sattuu välillä $(t, t + \Delta t]$.

(3.3.18):sta seuraa, että ensimmäisen uusiutumisaajan jakauma määrää koko prosessin vikataajuuden. Jos voidaan estimoida ensimmäisen vikaantumisen suhteellinen vikataajuus, voidaan estimoida koko prosessin absoluuttinen vikataajuus (ROCOF). Thompson (1981) väittääkin, että tämä epäintuitiivinen seikka luo epäilyksen varjon NHPP:n realistisuudelle korjattavien järjestelmien mallinnuksessa.

Vikaantumisten välinen aika

Merkitään:

- Y_t satunnaismuuttuja, joka kuvaa hetkestä t seuraavaan vikaantumiseen kuluvaa aikaa
- X_k satunnaismuuttuja, joka kuvaa vikaantumisten $(k - 1)$ ja k välistä aikaa

Oletetaan, että prosessi havainnoidaan hetkellä t_0 . Nyt ollaan kiinnostuneita seuraavaan vikaantumiseen kuluvan ajan jakaumasta. Käyttämällä kaavaa (3.3.18), voidaan ilmaista seuraavaan vikaantumiseen kuluvan ajan Y_{t_0} jakauma lausekkeella

$$(3.3.19) \Pr [Y_{t_0} > t] = \Pr [N(t_0 + t) - N(t_0) = 0] = \exp(-(V(t_0 + t) - V(t_0)))$$

$$= \exp\left(-\int_{t_0}^{t_0+t} v(u)du\right) = \exp\left(-\int_0^t v(t_0 + u)du\right).$$

(3.3.19) on riippumaton siitä, onko t_0 vikaantumisaika vai jokin mielivaltainen ajanhetki.

Olkoon t_0 ($k-1$):s vikaantumisaika. Tässä tapauksessa Y_{t_0} on vikaantumisten ($k-1$) ja k välinen aika eli $Y_{t_0} = X_k$. k :n väliajan suhteellinen vikataajuus on (3.3.19):sta

$$(3.3.20) \quad h_{t_0}(t) = v(t_0 + t) \quad , t \geq 0.$$

Vikaantumisen ($k-1$) (hetkellä t_0) ja k välinen keskimääräinen aika on

$$(3.3.21) \quad E[X_k] = E[Y_{t_0}] = \int_0^\infty \Pr[Y_{t_0} > t] dt = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t v(t_0 + u) du\right) dt.$$

Yhteys homogeeniseen Poisson-prosessiin

Olkoon $N(t)$ epähomogeeninen Poisson-prosessi, jonka absoluuttinen vikataajuusfunktio on $v(t) > 0$. Oletetaan, että kumulatiivisen vikataajuuden $V(t)$ käänteisfunktio $V^{-1}(t)$ on olemassa. Määritellään uusi prosessi $N^*(t)$ seuraavasti

$$(3.3.22) \quad N^*(t) = N(V^{-1}(t)) \quad , t \geq 0.$$

Nyt $N^*(t)$ on homogeeninen Poisson-prosessi vakiovikataajuudella $\lambda = I$. (Todistetaan liitteessä 3.)

NHPP voidaan siis sopivalla aikamuunnoksilla saattaa HPP:ksi.

Olkoon T_k aika k :nteen vikaantumiseen ($k = 0, 1, 2, \dots$), missä $T_0 = 0$. T_k :n jakauman määrittelee

(3.3.23)

$$\Pr [T_k > t] = \Pr [N(t) \leq k - 1] = \Pr [N^*(V(t)) \leq k - 1] = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{V(t)^j}{j!} \exp(-V(t))$$

Kun $V(t)$ on pieni, voidaan tämä todennäköisyys määrittää käyttämällä Poisson-jakauman standarditaulukoita. Kun $V(t)$ on suuri, voidaan todennäköisyys määrittää normaaliapproksimaatiolla:

(3.3.24)

$$\begin{aligned} \Pr [T_k > t] &= \Pr [N^*(V(t)) \leq k - 1] = \Pr \left(\frac{N^*(V(t)) - V(t)}{\sqrt{V(t)}} \leq \frac{k - 1 - V(t)}{\sqrt{V(t)}} \right) \\ &\approx \Phi \left(\frac{k - 1 - V(t)}{\sqrt{V(t)}} \right) \end{aligned}$$

3.4 Sensurointi

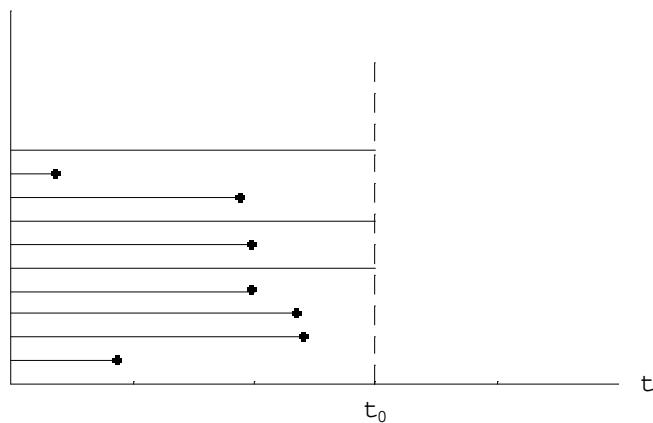
3.4.1 Sensurointi jakaumamallille

Hoyland ja Rausand (1994) erottavat jakaumamallille neljä eri sensurointityyppiä. Jatkossa puhuttaessa sensurointityypeistä tarkoitetaan juuri näitä neljää.

Nämä tapaukset ovat kaikki esimerkkejä tilanteista, joissa tutkitaan samankaltaisia yksiköitä toisistaan riippumattomasti. Tämänkaltaisia tilanteita voidaan mallintaa jakauman avulla, koska oletus yksiköiden riippumattomuudesta ja samoin jakautuneisuudesta on voimassa. Käytännön sovelluksissa on kuitenkin useimmiten kysymys järjestelmän mallinnuksesta, jolloin tämänkaltaisen yksinkertainen sensurointityyppien jaottelu ei yleensä ole mahdollista. Aluksi kuitenkin esitellään yksinkertainen jaottelu ja tarkastellaan tämän jälkeen sitä, voidaanko monimutkaisempia sensurointimekanismeja palauttaa näihin yksinkertaisiin tyyppeihin.

Tyypin I sensurointi

Kaikki kokeeseen osallistuvat yksiköt (n kpl) aktivoidaan hetkellä $t = 0$. Koe päätetään ennalta määrättyä ajanhetkenä $t = t_0$. Kokeen päätyttyä K yksikköä on vikaantunut ($0 \leq K \leq n$). Vain näiden K :n yksikön elinajat tunnetaan tarkasti, muut havainnot (siis ne, joille $T_i > t_0$) ovat sensuroituja havaintoja. Koska K on satunnaismuuttuja, on olemassa mahdollisuus, että vikaantuneita yksiköitä ei hetkellä t_0 ole lainkaan tai niiden suhteellinen osuus on hyvin pieni. Järkevän tilastollisen analyysin tekeminen tällaisesta aineistosta voi olla hankalaa, jopa mahdotonta. Tällainen tilanne tulisikin välttää kokeen huolellisella suunnittelulla. Kuva 3.1 selventää tilannetta: kymmenen yksikköä asetetaan toimintaan hetkellä $t = 0$. Koe sovitaan ennalta lopetettavaksi hetkellä $t = t_0$. Tällöin seitsemän yksikköä on vikaantunut ja näiden vikaantumisaikat siis tunnetaan, loput kolmen yksikön elinajat ovat sensuroituja havaintoja.

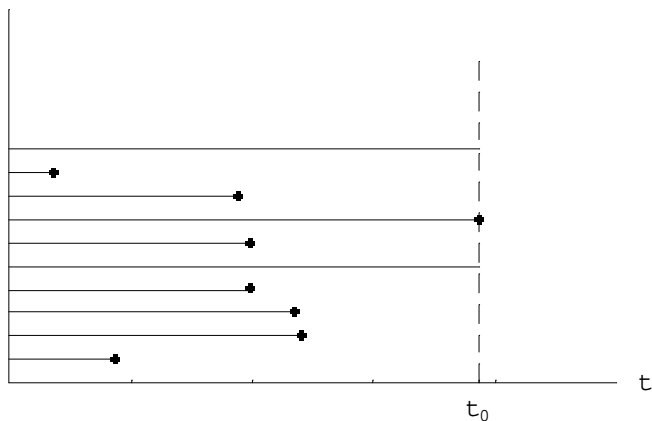


Kuva 3.1. Tyypin I sensurointi.

Tyypin II sensurointi

Kaikki kokeeseen osallistuvat yksiköt (n kpl) aktivoidaan hetkellä $t = 0$. Koe päätetään kun ennalta sovittu määrä k yksikköä on vikaantunut ($0 < k < n$), eli hetkellä T_k . Nyt vikaantuneiden yksiköiden lukumäärä on, toisin kuin tyypin I sensuroinnissa, ei-satunnainen. Sitä vastoin kokeen päättymishetki T_k on nyt satunnainen. Näin ollen ei voida ennalta tietää kuinka kauan koe kestää. Tämä tulisi ottaa huomioon kokeen suunnittelussa. Kuvassa 3.2 on kuvattu samankaltainen tilanne kuin edellä, mutta nyt päätetään ennalta lopettaa koe kun

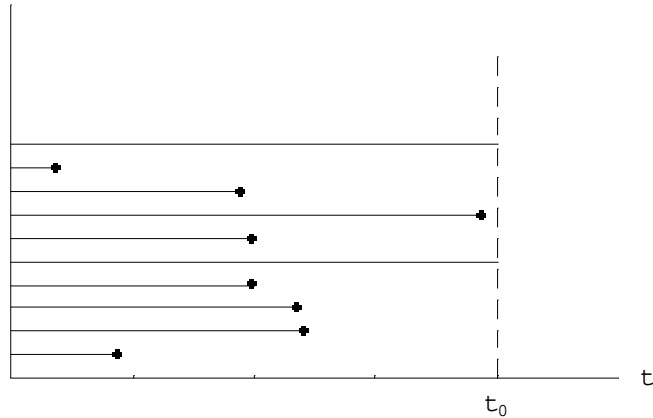
kahdeksan yksikköä on vikaantunut. Kahdeksas vikaantuminen tapahtuu hetkellä $T_8 = t_0$. Kahdeksan vikaantumisaikaa siis tunnetaan ja kaksi on sensuroituja.



Kuva 3.2. Tyypin II sensurointi.

Tyypin III sensurointi

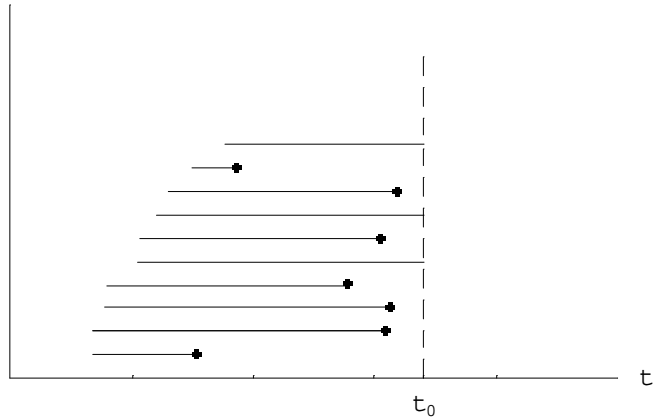
Kaikki kokeeseen osallistuvat yksiköt (n kpl) aktivoidaan hetkellä $t = 0$. Koe päätetään hetkellä $t = \min\{T_k, t_0\}$ (t_0 ja k on kiinnitetty etukäteen). Tämä on siis yhdistelmä kahdesta ensimmäisestä sensurointityypistä. Kuvassa 3.3 on jälleen samankaltainen tilanne kuin edellisissä esimerkeissä. Nyt koe sovitaan päätettäväksi, kunnes kaikki yksiköt ovat vikaantuneet tai viimeistään hetkellä $t = t_0$. Hetkellä $t = t_0$ on kahdeksan kymmenestä yksiköstä vikaantunut. Kaksi havainnoista on siis sensuroituja.



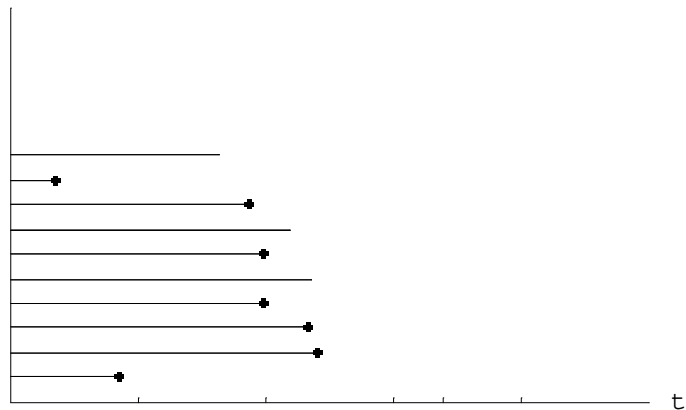
Kuva 3.3. Tyypin III sensurointi.

Tyypin IV sensurointi

Kokeeseen osallistuvat yksiköt (n kpl) aktivoidaan satunnaisina ajanhetkinä (eivät välttämättä erisuuria). Koe päätetään ennalta sovittuna ajanhetkenä $t = t_0$. Tilannetta kuvaa kuva 3.4. Siiretään nyt aktivointiajat origoon, eli hetkeen $t = 0$, jolloin voidaan tulkita sensurointiajat satunnaisiksi. Tilannetta kuvaa kuva 3.5. Jos yksikön i sensurointihetki S_i ($i = 1, \dots, n$) on satunnaismuuttuja, on kyseessä tyypin IV sensurointi. Tyypillisesti tällainen tilanne syntyy silloin kun lääketieteellisessä kokeessa tutkitaan potilaita (yksiköitä), jotka saapuvat hoitoon (aktivoidaan) sairastuttuaan. Aktivointiaikoja voidaan pitää satunnaisina.



Kuva 3.4. Tyypin IV sensurointi: alkuperäinen tilanne.



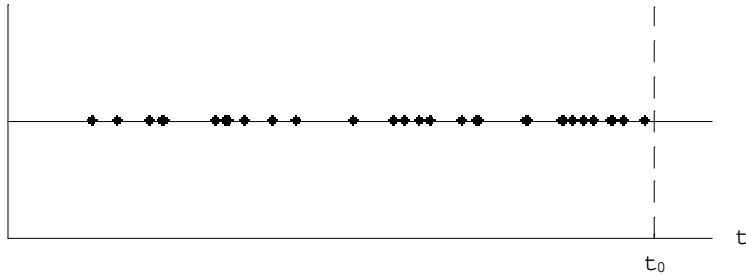
Kuva 3.5. Tyypin IV sensurointi, aktivointiajat siirretty origoon.

3.4.2 Sensurointi prosessimallille

Prosessimalleille erotetaan yleensä kaksi eri perussensurointityyppiä. Oletetaan, että tarkasteltavana on järjestelmä, joka asetetaan toimintaan hetkellä $t = 0$.

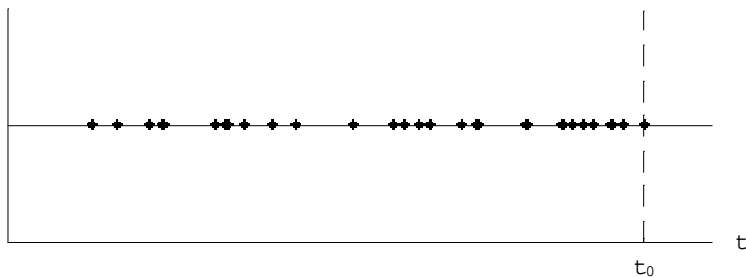
Aikasensuroinnilla tarkoitetaan sitä, että järjestelmän vikaantumisaajat havainnoidaan ennalta sovittuun hetkeen $t = t_0$ saakka. Tällöin on saatu vikaantumisaajat $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_0$, missä n on vikaantumisten lukumäärä välillä $(0, t_0]$. Selvästikin n on kokonaislukuarvoinen

satunnaismuuttuja, joka voi myös saada arvon 0, eli on mahdollista, ettei välillä $(0, t_0]$ satu ainuttakaan vikaantumista. Tilanne on kuvattu kuvassa 3.6.



Kuva 3.6. Aikasensurointi prosessimallille.

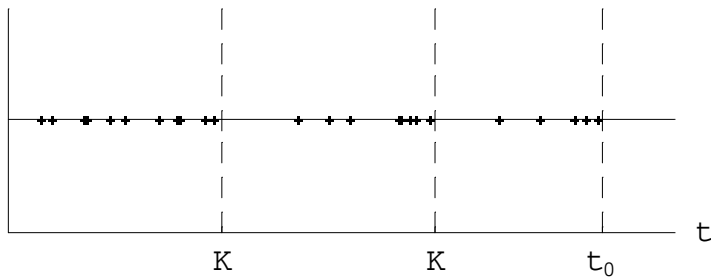
Vikasensuroinnilla puolestaan tarkoitetaan sitä, että järjestelmää havainnoidaan kunnes tietty määrä vikaantumisia on sattunut. Lukumäärä n siis kiinnitetään etukäteen ja havainnoidaan vikaantumisasjat $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_0$. Lopettamishetki $t_0 = T_n$ on nyt satunnaismuuttuja. Tilannetta kuvaa kuva 3.7.



Kuva 3.7. Vikasensurointi prosessimallille.

Käytännön sovelluksissa joudutaan usein mallintamaan järjestelmää, jolle suoritetaan ennakoivaa tai huoltavaa kunnossapitoa. Tarkastellaan seuraavaa esimerkkiä:

Järjestelmä asetetaan toimintaan hetkellä $t = 0$. Vikaantumisen yhteydessä vain vikaantunut osa vaihdetaan tai korjataan eli kyseessä on vähimmäis-korjausstrategia. Kerran vuodessa tapahtuu kunnossapito, jolloin järjestelmä huolletaan uutta vastaavaan kuntoon. Tällöin voidaan ajatella, että kunkin kunnossapitojakson jälkeen aika nollataan ja kukin kunnossapitojakso on ikään kuin oma aikasensuroitu prosessinsa. Tilanne on kuvattu aikajanalla kuvassa 3.8. Kunnossapidon vaikutuksiin palataan kappaleessa 4.3.3.



Kuva 3.8. Kunnossapidon aiheuttama sensurointi.

3.5 Uskottavuusmenetelmät

Uskottavuusmenetelmiä käsittelevä kappale myötäilee pitkälti Kalbfleischia (1985) sekä Helsingin yliopiston matematiikan laitoksella syksyllä 1996 prof. Mäkeläisen pitämää tilastotieteen kurssia.

3.5.1 Uskottavuusmenetelmät jakaumamallille

USKOTTAVUUSFUNKTIO

Merkitään:

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, $n \in \mathbf{N}_+$, havaintovektori (esim. n :n yksikön eliniät)
 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, $m \in \mathbf{N}_+$, parametrivektori, saa arvoja parametriavaruudessa $\Theta \subset \mathbf{N}^m$
 (θ :n dimensio siis tunnetaan, muutoin se on tuntematon)

Oletetaan, että on havaittu $X = x$. Tarkastellaan uskottavuusfunktion muodostumista sekä diskreetin että jatkuvan jakauman tapauksessa.

Diskreetti

Oletetaan, että on havaittu $X = x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, missä x_i :t ovat peräisin jostakin diskreetistä jakaumasta. Oletetaan lisäksi, että kyseessä on “yksinkertainen” otos, jossa havainnot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Tällöin x :n yhteispistetodennäköisyysfunktio saadaan kaavasta

$$(3.5.1) \quad \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta),$$

missä f on kyseessä olevan jakauman pistetodennäköisyysfunktio. Määritellään

$$(3.5.2) \quad L(\theta; x) := \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

Funktiota $L(\theta; x): \Theta \rightarrow R$ kutsutaan havaintoa x vastaavaksi **uskottavuusfunktioksi**.

Jatkuva

Oletetaan, että on havaittu $X = x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, missä x_i :t ovat peräisin jostakin jatkuvasta jakaumasta, jonka kertymäfunktio ja tiheysfunktio ovat $F(\cdot; \theta)$ ja $f(\cdot; \theta)$, $\theta \in \Theta$. Koska kyseessä on jatkuva jakauma, ovat havainnot käytännössä aina likiarvoja, eli tiedetään $-\infty \leq a_i \leq x_i \leq b_i \leq \infty$, $i = 1, \dots, n$. Uskottavuusfunktio määritellään nyt seuraavasti:

$$(3.5.3) \quad L(\theta; x) := \prod_{i=1}^n (F(b_i; \theta) - F(a_i; \theta)).$$

Jos väli (a_i, b_i) on lyhyt, on tulon i :s tekijä $\cong f(x_i; \theta)(b_i - a_i)$. Jos kaikki välit ovat lyhyitä (eli kaikki havainnot ovat jossain mielessä tarkkoja), on

$$(3.5.4) \quad L(\theta; x) \propto_{\theta} \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta).$$

Käytännössä päästään lähes aina riittävään tarkkuuteen, jolloin tiheysfunktion käyttö pistetodennäköisyysfunktion lailla on perusteltua. Kuitenkin on hyvä huomata, kuinka uskottavuusfunktio muodostuu silloin kun jotkut väleistä (a_i, b_i) eivät ole lyhyitä.

Esimerkkinä ajatellaan tilannetta, jossa havainnot ovat henkilöiden pituuksia. Täsmällisesti ottaen mittaukset ovat likiarvoja tyyliin ”henkilön A pituus on välillä (175.48 , 175.54)”, mutta käytännön sovelluksiin riittänee esim. yhden desimaalin tarkkuus, jolloin kaavaa (3.5.4) voidaan käyttää.

Jatkossa f tarkoittaa tiheysfunktiota, ellei erikseen muuta mainita.

USKOTTAVUUSFUNKTIO SENSUROIDULLE AINEISTOLLE

Sensuroidun aineiston tapauksessa uskottavuusfunktion muodostaminen eroaa hieman edellä esitetystä. Oletetaan, että n :stä havainnosta r kpl on sensuroimattomia ja $n-r$ kpl on oikealta sensuroituja (tässä esityksessä käsitellään vain oikealta sensurointia). Uskottavuusfunktio saa nyt muodon

$$(3.5.5) \quad L(\theta; x) = \prod_{j=1}^r f(x_j; \theta) \prod_{j=r+1}^n (1 - F(x_j; \theta)) = \prod_{j=1}^r f(x_j; \theta) \prod_{j=r+1}^n R(x_j; \theta).$$

Tulkinta (3.5.5):lle on seuraava: Sensuroimattomia havaintoja edustaa yhdistetty tiheysfunktio. Sensuroidut havainnot (kokeen jälkeen yhä toimivat yksiköt) ovat ”selviytyneet”, joten niitä edustaa yhdistetty selviytymisfunktio.

SUURIMMAN USKOTTAVUUDEN MENETELMÄ

Uskottavuusfunktio mittaa parametrinarvon θ uskottavuutta havainnon x selityksenä. Jos $L(\theta_1; x) > L(\theta_2; x)$, niin parametrinarvo θ_1 selittää aineiston parametrinarvoa θ_2 paremmin, sillä se antaa havainnolle x suuremman todennäköisyyden.

Suurimman uskottavuuden menetelmä on seuraava: Etsitään parametrinarvo $\hat{\theta}$, joka antaa havainnolle x suurimman todennäköisyyden. Toisin sanoen, havainnon x paras selitys on uskottavuusfunktion maksimoiva parametrinarvo $\hat{\theta}$. Tätä kutsutaan θ :n suurimman uskottavuuden estimaatiksi (maximum likelihood estimate, MLE). Tunnusluku $\theta = t(X)$ on θ :n suurimman uskottavuuden estimaattori, jos $t(x)$ on θ :n suurimman uskottavuuden estimaatti kaikilla x :n arvoilla, eli

$$(3.5.6) \quad L(\hat{\theta}; X) \geq L(\theta; X), \theta \in \Theta$$

Määritellään logaritminen uskottavuusfunktio

$$(3.5.7) \quad l(\theta; x) := \log(L(\theta; x)).$$

Koska logaritmin otto säilyttää järjestyksen, voidaan uskottavuusfunktion maksimi etsiä yhtä hyvin logaritmisesta uskottavuusfunktioista. Logaritmin otto on yleensä järkevää, sillä se muuttaa tulot summiksi ja näin ollen käytännön laskutoimitukset muuttuvat mukavammiksi suorittaa.

Tavallisesti suurimman uskottavuuden estimaatti etsitään ratkaisemalla uskottavuusyhtälöt

$$(3.5.8) \quad \frac{\partial}{\partial \theta_j} l(\theta; x) = 0, j = 1, \dots, m.$$

Parametrin dimensio siis määrää uskottavuusyhtälöiden lukumäärän. Useissa tapauksissa (3.5.8) ei ratkea suljetussa muodossa, vaan joudutaan käyttämään numeerisia menetelmiä.

USKOTTAVUUSJOUKOT

Edellisessä kappaleessa estimoitiin parametreja ns. piste-estimaatteina. Seuraavissa kappaleissa jatketaan parametrien estimointia, mutta hieman erilaisella lähestymistavalla. Tarkoituksena on määrittää sellainen otoksesta riippuva (satunnainen) väli tai joukko, joka (a priori) peittää parametrin oikean (mutta tuntemattoman) arvon tietyllä todennäköisyydellä (**luottamusjoukko**) tai

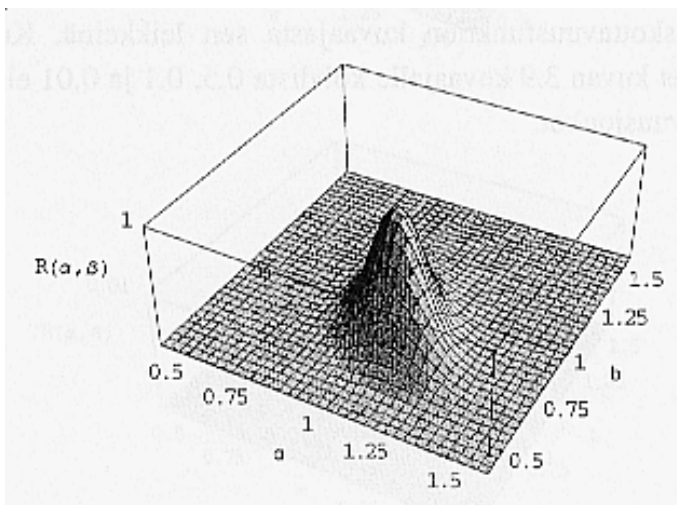
jossa parametri saa vähintään jonkin tietyn suhteellisen uskottavuuden (**uskottavuusjoukko**). Kun parametri on yksidimensioinen, puhutaan tavallisesti välistä, kun taas useampidimensioisissa tapauksissa johdetaan joukkoihin.

Jos uskottavuus $L(\theta; x)$ on lähellä maksimia $L(\theta; x)$ sanotaan, että kysymys on uskottavasta (=hyväksyttävästä) parametrinarvosta. Määritellään suhteellinen uskottavuusfunktio kaavalla

$$(3.5.9) \quad S(\theta; x) := \frac{L(\theta; x)}{L(\hat{\theta}; x)}.$$

Sille on voimassa $0 \leq S(\theta; x) \leq 1$, ja sitä voidaan käyttää parametrin hyväksyttävyyden mittana

Kaksiparametrisen jakauman tapauksessa $(\theta = (\alpha, \beta))$ suhteellisen uskottavuusfunktion kuvaaja on (α, β) -kentältä nouseva "uskottavuusvuori", joka saavuttaa maksimiarvonsa 1 pisteessä $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Esimerkki tästä kuvaajasta on kuvassa 3.9.



Kuva 3.9. Suhteellisen uskottavuusfunktion kuvaaja.

Siirrytään jälleen logaritmiselle asteikolle ja määritellään logaritminen suhteellinen uskottavuusfunktio

$$(3.5.10) \quad s(\theta ; x) := \log S(\theta ; x) = l(\theta ; x) - l(\hat{\theta} ; x) ,$$

jolle on voimassa $s(\theta ; x) \leq 0$.

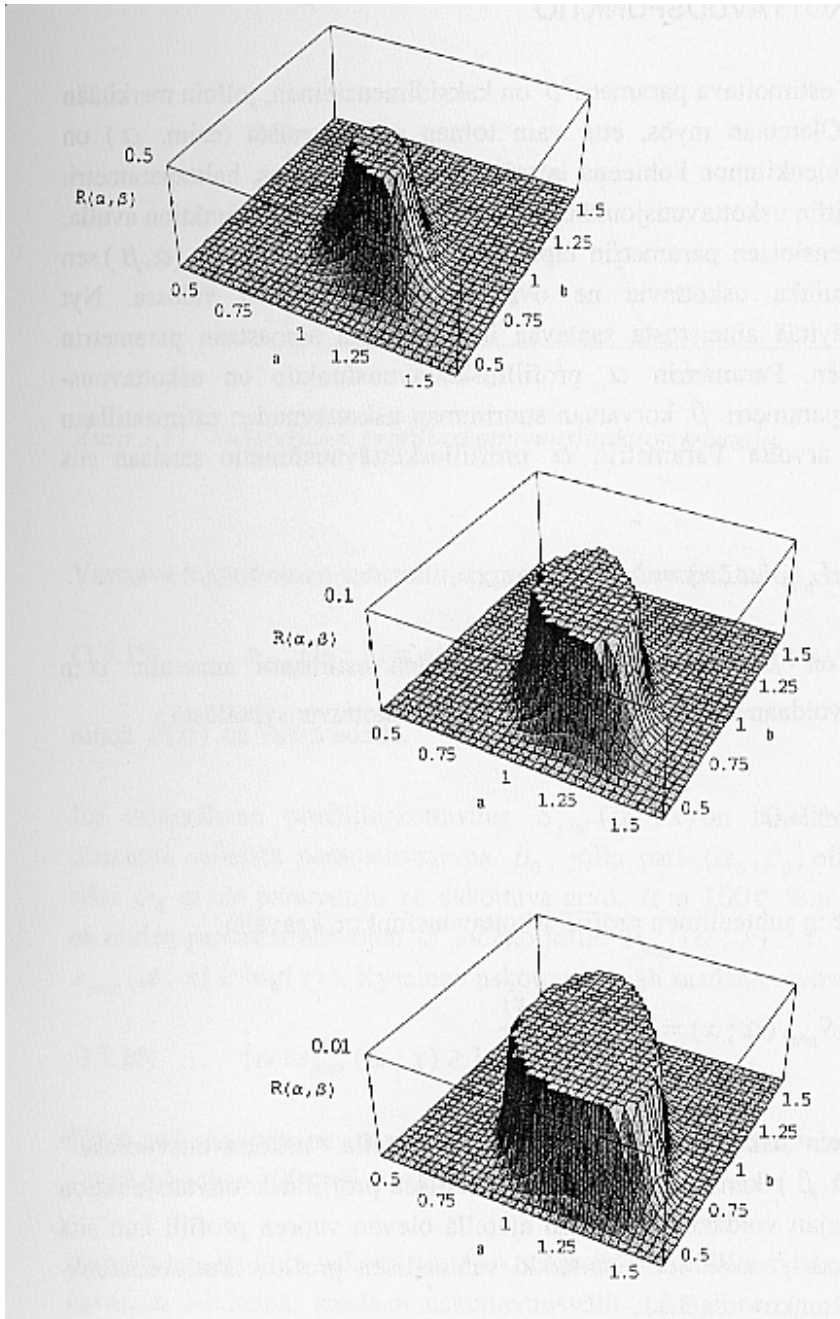
Joukkoa

$$(3.5.11) \quad \{ \theta \mid S(\theta ; x) \geq \tau \}$$

kutsutaan parametrin θ 100τ %:n uskottavuusjoukoksi. Tapauksessa $\dim(\theta) = 1$ (eli parametrivektori on yksidimensioinen) kyseinen uskottavuusjoukko on tavallisesti väli, jolloin sitä kutsutaan uskottavuusväliksi. Käytännössä uskottavuusjoukot kannattaa laskea logaritmisesta suhteellisesta uskottavuusfunktioista eli määrittää ne yhtälöstä

$$(3.5.12) \quad \{ \theta \mid s(\theta ; x) \geq \log(\tau) \}$$

Kaksiparametrisen jakauman tapauksessa uskottavuusjoukot saadaan suhteellisen uskottavuusfunktion kuvaajasta sen leikkeinä. Kuvassa 3.10 on esitetty leikkeet kuvan 3.9 kuvaajalle kohdista 0.5, 0.1 ja 0.01 eli 50 %, 10 % ja 1 %:n uskottavuusjoukot.



Kuva 3.10. Uskottavuusjoukot suhteellisen uskottavuusfunktion kuvaajan leikkeinä.

PROFIILIUSKOTTAVUUSFUNKTIO

Oletetaan, että estimoitava parametri θ on kaksidimensioinen, jolloin merkitään $\theta = (\alpha, \beta)$. Oletetaan myös, että vain toinen parametreista (esim. α) on varsinaisen mielenkiinnon kohteena ja toinen (tässä β) on ns. haittaparametri. Edellä estimoitiin uskottavuusjoukkoja suhteellisen uskottavuusfunktion avulla, joka kaksidimensioisen parametrin tapauksessa “pisteyttää” pareja (α, β) sen perusteella, kuinka uskottavia ne ovat havaitun aineiston valossa. Nyt halutaankin käyttää aineistosta saatavaa informaatiota ainoastaan parametrin α estimoimiseen. Parametrin α profiiliuskottavuusfunktio on uskottavuusfunktio, jossa parametri β korvataan suurimman uskottavuuden estimaatillaan kullakin α :n arvolla. Parametrin α profiiliuskottavuusfunktio saadaan siis kaavasta

$$(3.5.13) \quad L_{prof}(\alpha; x) = L(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); x),$$

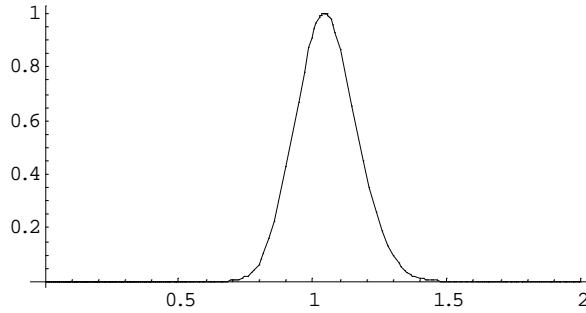
missä $\hat{\beta}(\alpha)$ on β :n suurimman uskottavuuden estimaatti annetulla α :n arvolla. Tämä voidaan määrittää ratkaisemalla β uskottavuusyhtälöstä

$$\frac{\partial}{\partial \beta} L(\alpha, \beta; x) = 0.$$

Määritellään α :n suhteellinen profiiliuskottavuusfunktio kaavalla

$$(3.5.14) \quad S_{prof}(\alpha; x) = \frac{L_{prof}(\alpha; x)}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

Kun suhteellinen uskottavuusfunktio voidaan ajatella “uskottavuusvuoreksi” joka nousee (α, β) -kentältä, niin α :n suhteellisen profiiliuskottavuusfunktion graafisen kuvaajan voidaan puolestaan ajatella olevan vuoren profiili kun sitä katsotaan kaukaa β -akselilta. Esimerkki suhteellisen profiiliuskottavuusfunktion kuvaajasta on kuvassa 3.11.



Kuva 3.11. Suhteellisen profiiliuskottavuusfunktion kuvaaja.

Vastaava logaritminen suhteellinen profiiliuskottavuusfunktio on

$$(3.5.15) \quad s_{prof}(\alpha; x) = s(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); x) = l(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); x) - l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; x),$$

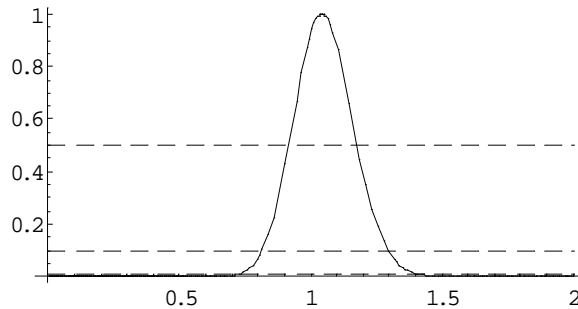
missä $\hat{\beta}(\alpha)$ on kuten edellä.

Jos suhteellinen profiiliuskottavuus $S_{prof}(\alpha_0; x)$ on lähellä nollaa, ei ole olemassa sellaista parametrinarvoa β_0 , jolla pari (α_0, β_0) olisi uskottava ja siksi α_0 ei ole parametrin α uskottava arvo. α :n 100τ %:n uskottavuusväli on niiden parametrinarvojen α joukko joille $S_{prof}(\alpha; x) \geq \tau$ (tai vastaavasti $s_{prof}(\alpha; x) \geq \log(\tau)$). Kyseinen uskottavuusväli saadaan myös kaavasta

$$(3.5.16) \quad \{\alpha \mid s_{prof}(\alpha; x) \geq \log(\tau)\}.$$

Tämä väli sisältää ne α :n arvot, joille on olemassa sellainen β , että pari (α, β) kuuluu 100τ %:n uskottavuusjoukkoon.

Samalla tavalla kuin uskottavuusjoukot saatiin suhteellisen uskottavuusfunktion kuvaajan leikkeinä, saadaan uskottavuusvälit suhteellisen profiiliuskottavuusfunktion kuvaajan leikkeinä. Kuvassa 3.12 on kuvan 3.11 kuvaajien leikkeet kohdissa 0.5, 0.1 ja 0.01. Nämä vastaavat siis 50 %, 10 % ja 1 % uskottavuusvälejä.



Kuva 3.12. Uskottavuusvälit suhteellisen profiiliuskottavuusfunktion leikkeinä.

Kalbfleischin (1985) mukaan yleensä on tapana määrittää parametrille 50 %, 10 % ja 1 %:n uskottavuusjoukot. 50 %:n uskottavuusjoukko koostuu θ :n “hyvin uskottavista”, 10 %:n joukko “hyväksyttävistä” ja 1 %:n joukko “hyvin epäuskottavista” θ :n arvoista. Suurissa otoksissa 100τ %:n tasoinen uskottavuusjoukko vastaa likimäärin $100(1-\tau)$ %:n tasoista luottamusjoukkoa (ks. Kalbfleisch (1985)). Kaksiparametrisessa tapauksessa on joskus on tapana määrittää myös 14.7 % ja 3.6 %:n uskottavuusjoukot, koska ne vastaavat yksittäisten parametrien 95 % ja 99 %:n luottamusvälejä (ks. Kalbfleisch 1985). Uskottavuustasojen määrittäminen on periaatteessa yhtä mielivaltaista kuin luottamustasojenkin määrittäminen, eikä kyseisiä uskottavuustasoja tulekaan ymmärtää liian kirjaimellisesti.

LUOTTAMUSJOUKOT

Roussas (1973) antaa luottamusvälille seuraavan määritelmän:

Määritelmä 3.5.1

Olkoot $Low(X)$ ja $Up(X)$ kaksi havaintovektorin X funktiota joille pätee $Low(X) \leq Up(X)$. Satunnaisväli $[Low(X), Up(X)]$ on parametrin θ luottamusväli luottamustasolla $1-\sigma$, ($0 < \sigma < 1$), jos

$$(3.5.17) \quad \Pr_{\theta} [Low(X) \leq \theta \leq Up(X)] \geq 1 - \sigma, \quad \text{kaikilla } \theta \in \Theta.$$

Edelleen $Up(X)$ on ylempi ja $Low(X)$ alempi θ :n luottamusraja luottamustasolla $1 - \sigma$, jos kaikille $\theta \in \Theta$ pätee

$$(3.5.18) \quad \Pr_{\theta} [-\infty < \theta \leq Up(X)] \geq 1 - \sigma \quad \text{ja}$$

$$\Pr_{\theta} [Low(X) \leq \theta < \infty] \geq 1 - \sigma$$

Satunnaisväli $[Low(X), Up(X)]$ on siis parametrin θ luottamusväli luottamustasolla $1 - \sigma$, jos todennäköisyys, että väli peittää oikean (mutta tuntemattoman) parametrinarvon on $1 - \sigma$.

Luottamusvälille voidaan esittää seuraava tulkinta: oletetaan, että koe parametrin luottamusvälin määrittämiseksi toistetaan riippumattomasti N kertaa. Tällöin N :n kasvaessa noin $100(1 - \sigma)\%$ luottamusväleistä peittää todellisen parametrin arvon. Samankaltainen tulkinta pätee myös ylempälle ja alemmalle luottamusrajalle.

Huom. Yhtälöistä (3.5.17), (3.5.18) ja seikasta

$$\Pr_{\theta} [\theta \geq Low(X)] + \Pr_{\theta} [\theta \leq Up(X)] = \Pr_{\theta} [Low(X) \leq \theta \leq Up(X)] + 1$$

seuraa, että jos $Up(X)$ on ylempi ja $Low(X)$ alempi θ :n luottamusraja luottamustasolla $1 - \sigma/2$, niin $[Low(X), Up(X)]$ on θ :n luottamusväli luottamustasolla $1 - \sigma$.

Monissa tapauksissa estimoitava parametri on useampidimensioinen. Tällöin voidaan varsinaisen mielenkiinnon kohteena olevan parametrin luottamusväli määrätä siten, että muut kuin tutkittava parametri korvataan sopivilla estimaattoreilla ja sen jälkeen toimitaan kuten edellä. On myös mahdollista määrittää useampidimensioiselle parametrille luottamusjoukkoja, joissa parametreja käsitellään yhtäaikaan.

Informaatiofunktio

Informaatiofunktio määritellään parametrin ollessa yksidimensioinen logaritmisen uskottavuusfunktion negatiivisena toisena derivaattana

$$(3.5.19) \quad I(\theta) = -l''(\theta; x), \quad \text{kun } \dim(\theta) = 1$$

Kun parametri on useampidimensioinen, muuntuu informaatiofunktio informaatiomatriisiksi. Kaksiparametrin jakauman tapauksessa informaatiofunktio on 2×2 -matriisi, jonka alkiot ovat logaritmisen uskottavuusfunktion negatiivisia toisia osittaisderivaattoja.

$$(3.5.20) \quad I(\alpha, \beta; x) = \begin{bmatrix} -I_{\alpha\alpha} & -I_{\alpha\beta} \\ -I_{\beta\alpha} & -I_{\beta\beta} \end{bmatrix},$$

missä
$$-I_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} l(\alpha, \beta; x)$$

$$-I_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} l(\alpha, \beta; x)$$

$$-I_{\beta\beta} = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} l(\alpha, \beta; x).$$

Huomaa, että $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$, joten matriisi $I(\alpha, \beta; x)$ on symmetrinen.

Informaatiofunktioista saadaan ehto uskottavuusfunktion maksimin olemassaololle. Yksi- ja kaksidimensioisen parametrin tapauksessa ehdot ovat (samassa järjestyksessä) $I(\theta) > 0$ ja $I_{\alpha\alpha} > 0$, $I_{\beta\beta} > 0$, $I_{\alpha\alpha}I_{\beta\beta} - I_{\alpha\beta}^2 > 0$ (eli informaatiomatriisi on positiivisesti definiitti). Yksityiskohtaisemmin asiaa tarkastelee mm. Kalbfleish (1985).

Havaittu informaatio on informaatiofunktio, johon on sijoitettu parametrien suurimman uskottavuuden estimaatit, eli $(\alpha, \beta) = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Esim. kaksiparametrin jakauman tapauksessa havaittu informaatio on

$$(3.5.21) \quad I_H = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; x) & -\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; x) \\ -\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; x) & -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; x) \end{bmatrix}.$$

Voidaan osoittaa, että

$$(3.5.22) \quad 2 \left[l(\hat{\theta}; x) - l(\theta; x) \right] \underset{a}{\approx} (\hat{\theta} - \theta)^T I(\hat{\theta}) (\hat{\theta} - \theta) \underset{a}{\approx} \chi^2(\dim(\theta)),$$

missä merkintä $\underset{a}{\approx}$ tarkoittaa “on asympotoottisesti jakautunut kuten”.

((3.5.21) todistetaan liitteessä 3 tapaukselle $\dim(\theta) = 1$)

Siispä kaksiparametrisen jakauman tapauksessa elliptiset luottamusjoukot voidaan likimääräisesti laskea kaavoista

$$(3.5.23) \quad \{(\alpha, \beta) \mid l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; x) - l(\alpha, \beta; x) \leq \frac{\chi_{\sigma}^2(2)}{2}\}$$

tai

$$(3.5.24) \quad \{(\alpha, \beta) \mid \left((\hat{\alpha}, \hat{\beta}) - (\alpha, \beta) \right)^T I((\hat{\alpha}, \hat{\beta})) \left((\hat{\alpha}, \hat{\beta}) - (\alpha, \beta) \right) \leq \chi_{\sigma}^2(2)\}$$

(3.5.23):ssa siis hyödynnetään logaritmista suhteellista uskottavuusfunktiota ja (2.5.24):ssa informaatiomatriisia.

Haluttaessa laskea yksittäisten parametrien luottamusvälejä toimitaan vastaavalla tavalla kuin laskettaessa uskottavuusvälejä yksittäisille parametreille. Aineistosta pyritään saamaan informaatiota mielenkiinnon kohteena olevasta parametrissa ja ns. hättäparametri korvataan sopivalla estimaatillaan. Hättäparametrin eliminointi voidaan suorittaa esim. profiiliuskottavuusfunktion avulla. Kaksiparametrisen jakauman tapauksessa kaavasta

$$(3.5.25) \quad \{\alpha \mid l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; x) - l(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); x) \leq \frac{\chi_{\sigma}^2(1)}{2}\}$$

tai kaavasta

$$(3.5.26) \quad \{\alpha \mid |(\hat{\alpha} - \alpha)I_{\alpha\alpha}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})(\hat{\alpha} - \alpha) \leq \chi_{\sigma}^2(1)\}$$

saadaan parametrin α $100(1 - \sigma)\%$:n luottamusväli.

RIIPPUMATTOMIEN AINEISTOJEN YHDISTÄMINEN

Tässä kappaleessa esitetään menetelmä yhdistää kahden tai useamman riippumattoman aineiston havainnoista saatava informaatio. Oletetaan, että on havaittu kaksi riippumatonta aineistoa, joista molemmista saadaan informaatiota parametrilla θ . Merkitään näitä havaintoja x^1 ja x^2 ja vastaavia uskottavuusfunktioita $L_1(\theta; x^1)$ ja $L_2(\theta; x^2)$. Nyt halutaan yhdistää molemmista aineistoista saatava informaatio ja muodostaa uskottavuusfunktio, joka perustuu molempiin aineistoihin x^1 ja x^2 . Samalla tavalla kuin edellä muodostettiin havaintovektorin riippumattomien yksiköiden yhteistiheysfunktio (kaavat (3.5.4) ja (3.5.5)), voidaan nyt muodostaa kahden riippumattoman havaintovektorin yhteistiheysfunktio

$$(3.5.27) \quad f(x^1, x^2; \theta) = f(x^1; \theta)f(x^2; \theta)$$

(3.5.27):sta seuraa välittömästi

$$(3.5.28) \quad L(\theta; x^1, x^2) = L_1(\theta; x^1)L_2(\theta; x^2)$$

josta saadaan

$$(3.5.29) \quad l(\theta; x^1, x^2) = l_1(\theta; x^1) + l_2(\theta; x^2).$$

Kaavat (3.5.28) ja (3.5.29) yleistyvät myös tapauksille, joissa halutaan yhdistää useammasta kuin kahdesta riippumattomasta aineistosta saatava informaatio koskien parametria θ . Haluttaessa yhdistää kahdesta tai useammasta riippumattomasta aineistosta saatava informaatio kerrotaan siis uskotta-

vuusfunktiot keskenään tai lasketaan yhteen logaritmiset uskottavuusfunktiot. Edelleen voidaan muodostaa yhdistettyjen aineistojen uskottavuusyhtälöt

(3.5.30)

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} l(\theta; x^1, x^2) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} l_1(\theta; x^1) + \frac{\partial}{\partial \theta_j} l_2(\theta; x^2) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Yhdistetyn aineiston uskottavuusyhtälöt saadaan riippumattomista aineistoista muodostettujen uskottavuusyhtälöiden summana. Myös (3.5.30) yleistyy useammalle kuin kahdelle aineistolle.

Olkoot $\hat{\theta}^1$ ja $\hat{\theta}^2$ suurimman uskottavuuden estimaatit laskettuna aineistoista x^1 ja x^2 ja olkoon $\hat{\theta}$ suurimman uskottavuuden estimaatti laskettuna yhdistetystä aineistosta. Erikoistapauksia lukuunottamatta ei ole mahdollista laskea $\hat{\theta}$:aa $\hat{\theta}^1$:n ja $\hat{\theta}^2$:n avulla vaan on muodostettava yhdistetyn aineiston uskottavuusyhtälöt (3.5.30). Jos $\hat{\theta}^1 = \hat{\theta}^2$, on myös $\hat{\theta} = \hat{\theta}^1 = \hat{\theta}^2$, muutoin yhdistetystä aineistosta laskettu suurimman uskottavuuden estimaatti on yleensä $\hat{\theta}^1$:n ja $\hat{\theta}^2$:n välissä (ainakin, jos uskottavuusfunktio on yksihiippuinen). Jos $\hat{\theta}^1$ ja $\hat{\theta}^2$ poikkeavat paljon toisistaan, on myös pohdittava onko aineistoja järkevää yhdistää, vai olisiko syytä tutkia ne erikseen ja pohtia mistä mahdolliset erot johtuvat.

3.5.2 Uskottavuusmenetelmät prosessimallille

Edellisessä kappaleessa käsiteltiin uskottavuusmenetelmiä tapauksissa, joissa havaintoaineisto muodostuu riippumattomista ja samoin jakautuneista muuttujan arvoista. Menetelmät siis soveltuvat käytettäviksi tapauksissa, joissa jakaumamallin käyttö on perusteltua. Näin on esimerkiksi silloin, kun kyseessä on trenditön prosessi eli tämän esityksen puitteissa homogeeninen Poisson-prosessi (palautuu eksponenttijakaumaan) tai uusiutumisprosessi (palautuu johonkin sopivaan elinaikajakaumaan). Kun kyseessä on epähomogeeninen Poisson-prosessi, eli malli, joka sallii trendin, poikkeavat menetelmät edellä esitetyistä.

Käytännön tilanteissa on useimmiten kysymyksessä aikasensuroituiksi tulkittavat aineistot. Siispä jatkossa käsitellään pääsääntöisesti aikasensuroitua prosessia.

SUURIMMAN USKOTTAVUUDEN MENETELMÄ

Basawa ja Prakasa (1980) antavat seuraavan keinon epähomogeenisen Poisson-prosessin parametrien estimoimiseen: Oletetaan, että tiedetään prosessin absoluuttisen vikaataajuusfunktion olevan muotoa $v(t; \theta)$, missä θ on parametrivektori, jonka dimensio tunnetaan, mutta muutoin se on tuntematon. Uskottavuusfunktio prosessille $\{X(t), 0 \leq t \leq t_0\}$ (t_0 siis kokeen lopettamishetki) saadaan kaavasta

$$(3.5.31) \quad L(\theta; t) = \left(\prod_{i=1}^n v(t_i; \theta) \right) \exp \left(- \int_0^{t_0} v(s; \theta) ds \right)$$

Logaritminen uskottavuusfunktio on

$$(3.5.32) \quad l(\theta; t) = \sum_{i=1}^n \log(v(t_i; \theta)) - \int_0^{t_0} v(s; \theta) ds$$

Suurimman uskottavuuden estimaatit saadaan jälleen maksimoimalla logaritminen uskottavuusfunktio (ja samalla tietenkin itse uskottavuusfunktioinkin) ratkaisemalla uskottavuusyhtälöt

$$(3.5.33) \quad \frac{\partial}{\partial \theta_j} l(\theta; t) = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, m.$$

USKOTTAVUUSJOUKOT

Uskottavuusjoukot muodostetaan suhteellisesta uskottavuusfunktioista samalla periaatteella kuin jakaumamallinkin tapauksessa (ks. kappale 3.5.1).

τ :n tasoinen uskottavuusjoukko (eli 100τ %:n uskottavuusjoukko) parametrille θ saadaan kaavasta

$$(3.5.34) \quad \{\theta \mid S(\theta; t) \geq \tau\} = \{\theta \mid \frac{l(\theta; t)}{l(\hat{\theta}; t)} \geq \tau\}.$$

Käytännössä nämäkin uskottavuusjoukot kannattaa laskea logaritmisesta suhteellisesta uskottavuusfunktioista eli määrittää ne kaavasta

$$(3.5.35) \quad \{\theta \mid s(\theta; x) \geq \log(\tau)\} = \{\theta \mid l(\theta; t) - l(\hat{\theta}; t) \geq \log(\tau)\}.$$

Myös yksittäisten parametrien uskottavuusvälien laskenta käy kappaleessa 3.5.1 esitetyllä tavalla profiiliuskottavuusfunktion avulla. Samoin riippumattomien aineistojen yhdistäminen yleistyy sellaisenaan myös prosessimallille. Kappaleen 3.5.1 kaavoja ei esitetä tässä uudelleen.

LUOTTAMUSJOUKOT

Luottamusjoukkojen määrittämisessä käytetään soveltuvin osin vaiheittaista analyysimenetelmää epähomogeeniselle Poisson-prosessille, jonka esittää Atwood (1991). Menetelmän ensimmäisessä vaiheessa käsitellään prosessin muotoparametria ehdollisen uskottavuusfunktionsa avulla ja lasketaan sille haluttu luottamusväli. Tämän jälkeen lasketaan tälle välille kuuluvia muotoparametrin arvoja vastaavat luottamusvälit asteikkoparametrille. Näin saadaan muodostettua kahden parametrin luottamusjoukkoja.

Menetelmä käydään yksityiskohtaisemmin läpi kappaleessa 4.3, jossa se johdetaan Weibull-prosessille.

4. WEIBULL-MALLIT

4.1 Jakauma ja prosessi, kaksi eri mallia

Edellisissä kappaleissa käsiteltiin jakauma- ja prosessimalleja yleisesti. Esitellään nyt kaksi käyttövarmuuslaskennassa yleisesti käytössä olevaa mallia - Weibull-jakauma ja Weibull-prosessi. On syytä heti aluksi painottaa sitä, että kyseessä on kaksi täysin erilaista mallia, vaikka nimissä ja vikataajuus-funktioissa onkin paljon yhteistä.

4.1.1 Weibull-jakauma

Elinajalla X , $X > 0$ sanotaan olevan Weibull(α , β)- jakauma, jos sen suhteellisen vikataajuusfunktion määrittelee

$$(4.1.1) \quad h_X(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1} \quad (\alpha > 0 \text{ muotoparametri, } \beta > 0 \text{ asteikko-parametri})$$

Koska suhteellinen vikataajuusfunktio määrää yksikäsitteisesti selviytymis-, kertymä- ja tiheysfunktion (ks. kappale 3.2) voidaan nämä kirjoittaa Weibull-jakaumalle kaavan (4.1.1) ja kaavojen (3.2.4), (3.2.5) ja tiheysfunktion määritelmän avulla

$$(4.1.2) \quad R_X(x; \alpha, \beta) = \exp(-\beta x^\alpha),$$

$$(4.1.3) \quad F_X(x; \alpha, \beta) = 1 - \exp(-\beta x^\alpha).$$

$$(4.1.4) \quad f_X(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha).$$

Weibull-jakauman odotusarvo ja varianssi saadaan kaavoista

$$(4.1.5) \quad E[X] = \frac{1}{\beta} \text{Gamma}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{ja}$$

$$(4.1.6) \quad D^2[X] = \frac{1}{\beta^2} \left(\text{Gamma} \left(1 + \frac{2}{\alpha} \right) - \text{Gamma} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \right)$$

missä gammafunktio määritellään lausekkeella

$$\text{Gamma}(y) = \int_0^{\infty} t^{y-1} e^{-t} dt, \quad y > 0.$$

4.1.2 Weibull-prosessi

Weibull-prosessi on epähomogeeninen Poisson-prosessi, jonka absoluuttinen vikataajuus (ROCOF) määritellään lausekkeella

$$(4.1.7) \quad v(t) = \alpha \beta t^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, t \geq 0.$$

Weibull-prosessin nimi johtuu siitä, että sen absoluuttisella vikataajuudella (ROCOF) on samankaltainen funktionaalinen muoto kuin Weibull-jakauman suhteellisella vikataajuudella. Prosessin ensimmäinen väliaika on Weibull (α, β) -jakautunut. Korjattava järjestelmä on paraneva, jos $0 < \alpha < 1$, ja huononeva, jos $\alpha > 1$. Kun $\alpha = 1$, palautuu malli homogeeniseksi Poisson-prosessiksi, eli vikaantumisten väliajat ovat riippumattomia ja samoin eksponentiaalisesti jakautuneita. Tämä nähdään helposti sijoittamalla $\alpha = 1$ kaavaan (4.1.7), jolloin absoluuttiseksi vikataajuudeksi saadaan $v(t) = \beta, \beta > 0$, eli se on ajasta riippumaton vakio.

4.2 Weibull-jakautuneen datan käsittelyä

4.2.1 Uskottavuusmenetelmät

Tässä kappaleessa käydään vain lyhyesti läpi se, millaisiksi uskottavuusmenetelmät muuntuvat Weibull-jakauman tapauksessa. Uskottavuusmenetelmien yleistä teoriaa käsiteltiin kappaleessa 3.5.

Sensuroimaton data

Weibull-jakauman tapauksessa uskottavuusfunktio on muotoa

$$\begin{aligned}
(4.2.1) \quad L(\alpha, \beta; x) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \alpha, \beta) \\
&= \prod_{i=1}^n \alpha \beta x_i^{\alpha-1} \exp(-\beta x_i^\alpha) \\
&= (\alpha \beta)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} \exp(-\beta x_i^\alpha)
\end{aligned}$$

joten vastaava logaritminen uskottavuusfunktio on

$$(4.2.2) \quad l(\alpha, \beta; x) = \sum_{i=1}^n (\log(\alpha) + \log(\beta) + (\alpha - 1) \log(x_i) - \beta x_i^\alpha).$$

Uskottavuusyhtälöt saadaan logaritmissen uskottavuusfunktion osittaisderivaatoista. Ne ovat

$$(4.2.3) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha, \beta; x) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n (\log(x_i) - \beta x_i^\alpha \log(x_i)) = 0 \quad \text{ja}$$

$$(4.2.4) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} l(\alpha, \beta; x) = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i^\alpha = 0.$$

Sensuroitu data

Uskottavuusfunktio on nyt

$$\begin{aligned}
(4.2.5) \quad L(\alpha, \beta; x) &= \prod_{i=1}^r f(x_i; \alpha, \beta) \prod_{i=r+1}^n R(x_i; \alpha, \beta) \\
&= \prod_{i=1}^r \alpha \beta x_i^{\alpha-1} \exp(-\beta x_i^\alpha) \prod_{i=r+1}^n \exp(-\beta x_i^\alpha),
\end{aligned}$$

jota vastaa logaritminen uskottavuusfunktio

$$(4.2.6) \quad l(\alpha, \beta; x) = r \log(\alpha) + r \log(\beta) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^r \log(x_i) - \beta \sum_{i=1}^n x_i^\alpha .$$

Uskottavuusyhtälöt saadaan jälleen logaritmissen uskottavuusfunktion osittaisderivaatoista. Ne ovat

$$(4.2.7) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha, \beta; x) = \frac{r}{\alpha} + \sum_{i=1}^r \log(x_i) - \beta \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \log(x_i) = 0 \quad \text{ja}$$

$$(4.2.8) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} l(\alpha, \beta; x) = \frac{r}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i^\alpha = 0 .$$

Ratkaisemalla (4.2.8):sta β , saadaan

$$(4.2.9) \quad \beta = \frac{r}{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha} ,$$

ja sijoittamalla (4.2.9) (4.2.7):een, saadaan α :lle β :sta riippumaton yhtälö

$$(4.2.10) \quad \frac{r}{\alpha} + \sum_{i=1}^r \log(x_i) - \frac{r \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha} = 0 .$$

Ratkaisemalla (4.2.10):sta α ja sijoittamalla tämä (4.2.9):een, saadaan suurimman uskottavuuden estimaatti $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Ratkaisemisessa joudutaan käyttämään numeerisia menetelmiä.

Jatkossa ei enää anneta erikseen kaavoja sensuroimattomalle ja sensuroidulle aineistolle, vaan kaikki kaavat sallivat myös sensuroinnin olemassaolon.

Uskottavuusjoukot

τ :n tasoinen elliptinen uskottavuusjoukko α :lle ja β :lle saadaan kaavasta

$$(4.2.11) \quad \{(\alpha, \beta) \mid R(\alpha, \beta; x) \geq \tau\} = \{(\alpha, \beta) \mid \frac{L(\alpha, \beta; x)}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; x)} \geq \tau\},$$

missä uskottavuusfunktio $L(\cdot)$ saadaan kaavasta (4.2.5).

Sama uskottavuusjoukko saadaan myös vastaavan logaritmisen suhteellisen uskottavuusfunktion avulla kaavasta

$$(4.2.12) \quad \{(\alpha, \beta) \mid r(\alpha, \beta; x) \geq \log(\tau)\} \\ = \{(\alpha, \beta) \mid l(\alpha, \beta; x) - l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; x) \geq \log(\tau)\},$$

missä logaritminen uskottavuusfunktio $l(\cdot)$ saadaan kaavasta (4.2.6).

α :n logaritminen suhteellinen profiiliuskottavuusfunktio on

$$(4.2.13) \quad s_{prof}(\alpha; x) = l(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); x) - l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, x),$$

missä

$$l(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); x) = l(\alpha, \frac{r}{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha}; x)$$

$$= r \log(\alpha) + r \log\left(\frac{r}{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha}\right) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^r \log(x_i) - \frac{\sum_{i=r+1}^n r x_i^\alpha}{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha},$$

τ :n tasoinen uskottavuusväli α :lle saadaan nyt kaavasta

$$(4.2.14)$$

$$\{\alpha \mid s_{prof}(\alpha; x) \geq \log(\tau)\} = \{\alpha \mid l(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); t) - l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; t) \geq \log(\tau)\}.$$

Luottamusjoukot

100(1- σ)% :n elliptinen luottamusjoukko parametrille (α, β) saadaan kaavasta

$$(4.2.15) \quad \{(\alpha, \beta) \mid l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; x) - l(\alpha, \beta; x) \leq \frac{\chi_{\sigma}(2)}{2}\},$$

missä logaritminen uskottavuusfunktio saadaan kaavasta (4.2.6). (Koska $\dim((\alpha, \beta)) = 2$, on vapausasteiden lukumäärä 2.)

100(1- σ)% :n luottamusväli α :lle saadaan kaavasta

$$(4.2.16) \quad \{\alpha \mid l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; x) - l(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); x) \leq \frac{\chi_{\sigma}(1)}{2}\},$$

missä logaritminen profiiliskottavuusfunktio saadaan kaavasta (4.2.13). (Koska $\dim(\alpha) = 1$, on vapausasteiden lukumäärä 1.)

Riippumattomien aineistojen yhdistäminen

m :n riippumattoman aineiston x^1, x^2, \dots, x^m yhteisuskottavuusfunktio on

$$(4.2.17) \quad L(\alpha, \beta; x) = \prod_{j=1}^m L_j(\alpha, \beta; x^j).$$

Vastaava logaritminen yhteisuskottavuusfunktio on

$$(4.2.18) \quad l(\alpha, \beta; x) = \sum_{j=1}^m l_j(\alpha, \beta; x^j).$$

Uskottavuusyhtälöt saadaan totuttuun tapaan logaritmissen yhteisuskottavuusfunktion osittaisderivaatoista. Ne ovat

$$(4.2.19) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha, \beta; x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial \alpha} l_j(\alpha, \beta; x^j) = 0 \quad \text{ja}$$

$$(4.2.20) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} l(\alpha, \beta; x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial \beta} l_j(\alpha, \beta; x^j) = 0$$

Uskottavuus- ja luottamusjoukot muodostetaan näistä aivan vastaavalla tavalla kuin yhden aineiston tapauksessa. Kaavoja ei esitetä uudelleen.

4.3 Weibull-prosessia noudattavan datan käsittelyä

4.3.1 Uskottavuusmenetelmät

Uskottavuusfunktio on

$$(4.3.1) \quad L(\alpha, \beta; t) = \left(\prod_{i=1}^n \alpha \beta t_i^{\alpha-1} \right) \exp\left(- \int_0^{t_0} \alpha \beta s^{\alpha-1} ds \right)$$

$$= \alpha^n \beta^n \left(\prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} \right) \exp(-\beta t_0^\alpha).$$

Vastaava logaritminen uskottavuusfunktio on

$$(4.3.2) \quad l(\alpha, \beta; t) = n \log(\alpha) + n \log(\beta) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \beta t_0^\alpha.$$

Uskottavuusyhtälöt ovat

$$(4.3.3) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha, \beta; t) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \beta t_0^\alpha \log(t_0) = 0 \quad \text{ja}$$

$$(4.3.4) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} l(\alpha, \beta; t) = \frac{n}{\beta} - t_0^\alpha = 0.$$

Ratkaisemalla (4.3.4):sta β , saadaan

$$(4.3.5) \quad \beta = \frac{n}{t_0^\alpha},$$

ja sijoittamalla (4.3.5) yhtälöön (4.3.3), saadaan α :lle yhtälö, jonka ratkaisulle löytyy analyyttinen muoto. Parametrin α suurimman uskottavuuden estimaatti saadaan täten yhtälöstä

$$(4.3.6) \quad \hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(t_0 / t_i)}.$$

Parametrin β suurimman uskottavuuden estimaatti saadaan nyt sijoittamalla $\hat{\alpha}$ yhtälöön (4.3.5), eli yhtälöstä

$$(4.3.7) \quad \hat{\beta} = \frac{n}{t_0^{\hat{\alpha}}}.$$

Uskottavuusjoukot

τ :n tasoinen elliptinen uskottavuusjoukko α :lle ja β :lle saadaan kaavasta

$$(4.3.8) \quad \{(\alpha, \beta) \mid R(\alpha, \beta; t) \geq \tau\} = \{(\alpha, \beta) \mid \frac{L(\alpha, \beta; t)}{L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; t)} \geq \tau\},$$

missä uskottavuusfunktio $L(\cdot)$ saadaan kaavasta (4.3.1).

Sama uskottavuusjoukko saadaan myös vastaavan logaritmisen suhteellisen uskottavuusfunktion avulla kaavasta

$$(4.3.9) \quad \{(\alpha, \beta) \mid r(\alpha, \beta; t) \geq \log(\tau)\} = \{(\alpha, \beta) \mid l(\alpha, \beta; t) - l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; t) \geq \log(\tau)\}$$

missä logaritminen uskottavuusfunktio $l(\cdot)$ saadaan kaavasta (4.3.2).

α :n suhteellinen logaritminen profiiliuskottavuusfunktio on

missä logaritminen uskottavuusfunktio $l(\cdot)$ saadaan kaavasta (4.3.2).

α :n suhteellinen logaritminen profiiliuskottavuusfunktio on

$$(4.3.10) \quad s_{prof}(\alpha; x) = l(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); x) - l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, x),$$

missä

$$l(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); t) = l(\alpha, \frac{n}{t_0^\alpha}; t) = n \log(\alpha) + n \log(n / t_0^\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(t_i) - n$$

τ :n tasoinen uskottavuusväli α :lle saadaan nyt kaavasta

$$(4.3.11)$$

$$\{\alpha \mid s_{prof}(\alpha; x) \geq \log(\tau)\} = \{\alpha \mid l(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); t) - l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}; t) \geq \log(\tau)\}.$$

Luottamusjoukot

Luottamusväli muotoparametrille normaaliapproksimaation avulla:

Tarkasteltaessa Weibull-prosessia ollaan usein kiinnostuneita erityisesti muotoparametrista α , sillä sen arvo määrittää prosessin varsinaisen luonteen, eli sen kuinka vahva parantuva tai huonontuva trendi on. Usein onkin tapana käsitellä parametria β häihtarparametrina ja laskea α :n luottamusvälit ehdollisen uskottavuusfunktionsa avulla. Kun kyseessä on aikasensurointi, ehdollistetaan vikaantumisten lukumäärälle. Kyseinen ehdollinen uskottavuusfunktio saadaan siten jakamalla uskottavuusfunktio (4.3.1) todennäköisyydellä saada n vikaantumista välillä $(0, t_0]$. Vikasensuroinnissa puolestaan ehdollistetaan viimeisen vikaantumisen ajalle. Ehdollisen uskottavuusfunktion muodostamisen yksityiskohdista ks. Cox ja Lewis (1966).

Ehdollinen uskottavuusfunktio parametrille α (aikasensurointi) saadaan kaavasta

$$(4.3.12) \quad L_C(\alpha; t) = \frac{n! \alpha^n \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1}}{t_0^{\alpha n}}.$$

Logaritminen ehdollinen uskottavuusfunktio saadaan suoraan (4.3.12):sta

$$(4.3.13) l_C(\alpha; t) = n \log(\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \alpha n \log(t_0) + \log(n!).$$

Kun (4.3.13) derivoidaan, saadaan

$$(4.3.14) \quad l'_C(\alpha; t) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(t_i) - n \log(t_0).$$

Informaatiofunktio saadaan (4.3.14):sta sen negatiivisena derivaattana

$$(4.3.15) \quad I(\alpha; t) = -l''_C(\alpha; t) = \frac{n}{\alpha^2}.$$

Koska $l'_C(\alpha; t)$:n voidaan ajatella olevan riippumattomien satunnaismuuttujien t_i funktioiden summa, on se asympotoottisesti normaalijakautunut. Voidaan osoittaa, että sen keskiarvo on 0 ja varianssi $I(\alpha; t)$. Näin ollen pätee

$$(4.3.16) \quad \frac{l'_C(\alpha; t)}{\sqrt{I(\alpha; t)}} \approx N(0,1).$$

$100(1 - \sigma)\%$:n luottamusväli muotoparametrille α saadaan nyt lausekkeesta

$$(4.3.17) \quad \left\{ \alpha \mid -q_\sigma \leq \frac{l'_C(\alpha; t)}{\sqrt{I(\alpha; t)}} \leq q_\sigma \right\}.$$

Luottamusväli asteikkoparametrille β :

Kappaleessa 3.3.1 käsiteltiin epähomogeenisen ja homogeenisen Poisson-prosessin yhteyttä. Kaavasta (3.3.16) saadaan

$$(4.3.18) \quad \Pr[N(t) = n] = \frac{V(t)^n}{n!} \exp(-V(t)).$$

Tästä seuraa suoraan (N on vikaantumisten lukumäärä välillä $(0, t_0]$)

(4.3.19)

$$\Pr[N = n] = \Pr[N(t_0) = n] = \frac{V(t_0)^n}{n!} \exp(-V(t_0)) = \frac{\beta t_0^\alpha}{n!} \exp(-\beta t_0^\alpha).$$

N on siis Poisson-jakautunut satunnaismuuttuja keskiarvolla βt_0^α .

Oletetaan, että on havaittu $N = n$. Tällöin βt_0^α :n $100(1-\sigma)\%$:n likimääräinen luottamusväli $[(\beta t_0^\alpha)_L, (\beta t_0^\alpha)_U]$ saadaan ratkaisemalla yhtälöt (ks. Johnson & Kotz (1969))

$$(4.3.20) \quad \exp(-(\beta t_0^\alpha)_L) \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\beta t_0^\alpha)_L^i}{i!} = \frac{\sigma}{2} \quad \text{ja}$$

$$(4.3.21) \quad \exp(-(\beta t_0^\alpha)_U) \sum_{i=0}^n \frac{(\beta t_0^\alpha)_U^i}{i!} = \frac{\sigma}{2}.$$

Poisson- ja χ^2 -jakauman välillä vallitsevien yhteyksien (ks. Johnson & Kotz (1969)) nojalla voidaan yhtälöt (4.3.20) ja (4.3.21) kirjoittaa muodossa

$$(4.3.22) \quad (\beta t_0^\alpha)_L = \frac{\chi_{\sigma/2}^2(2n)}{2} \quad \text{ja}$$

$$(4.3.23) \quad (\beta t_0^\alpha)_U = \frac{\chi_{1-\sigma/2}^2(2(n+1))}{2}.$$

Yhtälöistä (4.3.22) ja (4.3.23) saadaan nyt $100(1-\sigma)\%$:n likimääräinen luottamusväli β :lle annetulla α :n arvolla. Tämä luottamusväli on

$$(4.3.24) \quad \left[\frac{\chi_{\sigma/2}^2(2n)}{2t_0^\alpha}, \frac{\chi_{1-\sigma/2}^2(2(n+1))}{2t_0^\alpha} \right].$$

Luottamusjoukko (α, β) :lle:

Käytetään hyväksi edellisiä kohtia ja muodostetaan $100(1-\sigma)\%$:n luottamusjoukko (α, β) :lle seuraavasti. Ensin muodostetaan $100(1-\sigma/2)\%$:n luottamusväli α :lle kaavan (4.3.17) avulla. Tämän jälkeen

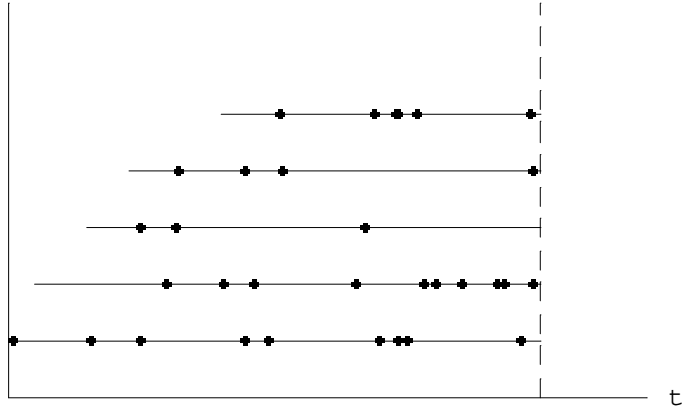
muodostetaan kutakin tälle välille kuuluvaa α :n arvoa vastaava $100(1 - \sigma / 2)\%$:n luottamusväli parametrille β kaavan (4.3.24) avulla. Näin saatu joukko on (α, β) :n $100(1 - \sigma)\%$:n luottamusjoukko.

4.3.2 Riippumattomien aineistojen yhdistäminen

Merkitään:

m	riippumattomien järjestelmien lukumäärä
$i = 1, \dots, m$	indeksoi järjestelmät
r_i	havaittujen vikaantumisten lukumäärä järjestelmässä i
$j = 1, \dots, r_i$	indeksoi vikaantumiset
n	vikaantumisten kokonaislukumäärä, $n = \sum_{i=1}^m r_i$
$t_{i,0}$	järjestelmän i havainnointiaika
$t_{i,j}$	järjestelmän i j :s vikaantumisaika

Oletetaan m samankaltaista riippumatonta järjestelmää, jotka asetetaan toimintaan eri ajanhetkinä. Myös niiden havainnointiajat voivat olla erisuuria. Kuvassa 4.1 on tilanne, jossa kunkin järjestelmän havainnointiaikaa kuvaa jana ja janalle merkityt pisteet ovat vikaantumisaikoja. Oletetaan järjestelmien vikaantumisaikojen noudattavan samaa Weibull-prosessia. Yhdistetään m :stä järjestelmästä saatu aineisto ja estimoidaan suurimman uskottavuuden estimaatit parametreille α ja β .



Kuva 4.1. Riippumattomat prosessit.

Järjestelmän i vikaantumisaajat ja havainnoinnin päättymishetki ovat

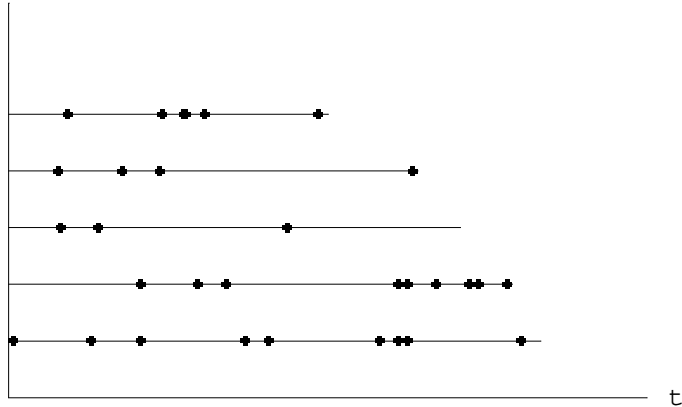
$$t'_{i,s} < t'_{i,1} < \dots < t'_{i,r_i} < t'_{i,0} ,$$

missä $t'_{i,s} :=$ hetki, jolloin järjestelmä i asetetaan toimintaan.

Analyysin helpottamiseksi siirretään kunkin järjestelmän aloitushetki origoon. Kuva 4.2 esittää kuvan 4.1 tilanteen siirrettynä origoon. Siirretyt vikaantumisaajat ja havainnointiaika järjestelmälle i ovat (samassa järjestyksessä)

$$t_{i,j} = t'_{i,j} - t'_{i,s} \quad \text{ja}$$

$$t_{i,0} = t'_{i,0} - t'_{i,s} .$$



Kuva 4.2. Riippumattomat prosessit, aloitusajat siirretty origoon.

Järjestelmän i vikaantumisaajat ovat nyt

$$0 < t_{i,1} < \dots < t_{i,r_i} < t_{i,0}.$$

Järjestelmän i uskottavuusfunktio on kaavan (4.3.1) mukaan

$$(4.3.25) \quad L_i(\alpha, \beta; t) = \left(\prod_{j=1}^{r_i} \alpha \beta t_{i,j}^{\alpha-1} \right) \exp(-\beta t_{i,0}^{\alpha}).$$

$m:n$ riippumattoman järjestelmän yhteisuskottavuusfunktio on kappaleiden 3.5.1 ja 3.5.2 mukaan

$$(4.3.26) \quad L(\alpha, \beta; t) = \prod_{i=1}^m L_i(\alpha, \beta)$$

$$= \prod_{i=1}^m \left(\left(\prod_{j=1}^{r_i} \alpha \beta t_{i,j}^{\alpha-1} \right) \exp(-\beta t_{i,0}^{\alpha}) \right)$$

$$= \prod_{i=1}^m \left(\alpha^{r_i} \beta^{r_i} \prod_{j=1}^{r_i} t_{i,j}^{\alpha-1} \right) \exp\left(-\sum_{i=1}^m \beta t_{i,0}^{\alpha}\right)$$

$$= \alpha^n \beta^n \left(\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{r_i} t_{i,j} \right)^{\alpha-1} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \beta t_{i,0}^\alpha \right).$$

Vastaava logaritminen yhteisuskottavuusfunktio on

$$(4.3.27) \quad l(\alpha, \beta; t) = n \log(\alpha) + n \log(\beta) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} \log(t_{i,j}) - \beta \sum_{i=1}^m t_{i,0}^\alpha.$$

Uskottavuusyhtälöt saadaan normaaliin tapaan logaritmissen yhteisuskottavuusfunktion osittaisderivaatoista. Ne ovat

$$(4.3.28) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha, \beta) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} \log(t_{i,j}) - \beta \sum_{i=1}^m t_{i,0}^\alpha \log(t_{i,0}) = 0 \quad \text{ja}$$

$$(4.3.29) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} l(\alpha, \beta) = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^m t_{i,0}^\alpha = 0.$$

Ratkaisemalla (4.3.29):sta β ja sijoittamalla se (4.3.28):een saadaan yhtälö

$$(4.3.30) \quad \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} \log(t_{i,j}) - \frac{n \sum_{i=1}^m t_{i,0}^\alpha \log(t_{i,0})}{\sum_{i=1}^m t_{i,0}^\alpha} = 0.$$

Ratkaisemalla tästä α saadaan α :n suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\alpha}$. Ratkaisemisessa joudutaan käyttämään numeerisia menetelmiä. β saadaan tämän jälkeen yhtälöstä

$$(4.3.31) \quad \hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^m t_{i,0}^{\hat{\alpha}}} .$$

Uskottavuusjoukot

τ :n tasoinen elliptinen uskottavuusjoukko α :lle ja β :lle saadaan kaavasta (4.3.8), missä uskottavuusfunktio $L(\cdot)$ on kaavan (4.3.26) mukainen.

Sama uskottavuusjoukko saadaan myös vastaavan logaritmisen suhteellisen uskottavuusfunktion avulla kaavasta (4.3.9), missä logaritminen uskottavuusfunktio $l(\cdot)$ on kaavan (4.3.27) mukainen.

α :n logaritminen suhteellinen profiiliuskottavuusfunktio on

$$(4.3.32) \quad s_{prof}(\alpha; x) = l(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); x) - l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, x),$$

missä

$$l(\alpha, \hat{\beta}(\alpha); t) = l\left(\alpha, \frac{n}{\sum_{i=1}^m t_{i,0}^{\alpha}}; t\right) = n \log(\alpha) + n \log\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^m t_{i,0}^{\alpha}}\right) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{t_i} \log(t_{i,j}) - n$$

τ :n tasoinen uskottavuusväli α :lle saadaan nyt kaavasta (4.3.11), missä logaritminen suhteellinen profiiliuskottavuusfunktio on kaavan (4.3.32) mukainen.

Luottamusjoukot

Luottamusväli muotoparametrille normaaliapproksimaation avulla:

Vastaava menetelmä yhdelle aineistolle yleistyy välittömästi myös riippumattomien aineistojen yhdistämiseen. Olkoon $L_{ic}(\alpha; t)$ i :n järjestelmän ehdollinen uskottavuusfunktio. m :n riippumattoman järjestelmän ehdollinen yhteisuskottavuusfunktio on nyt

$$(4.3.33) \quad L_C(\alpha; t) = \prod_{i=1}^m L_{iC}(\alpha; t).$$

Tästä seuraa välittömästi

$$(4.3.34) \quad l_C(\alpha; t) = \sum_{i=1}^m l_{iC}(\alpha; t),$$

$$(4.3.35) \quad \dot{l}_C(\alpha; t) = \sum_{i=1}^m \dot{l}_{iC}(\alpha; t) \quad \text{ja}$$

$$(4.3.36) \quad I(\alpha; t) = -\dot{l}_C''(\alpha; t) = \sum_{i=1}^m \dot{l}_{iC}''(\alpha; t).$$

Samoin oletuksin kuin edellä $\dot{l}_C(\alpha; t)$ on asympotoottisesti normaalijakautunut keskiarvona 0 ja varianssina $I(\alpha; t)$ ja näin ollen $100(1 - \sigma)\%$:n luottamusväli muotoparametrille α saadaan lausekkeesta

$$(4.3.37) \quad \left\{ \alpha \mid -q_\sigma \leq \frac{\dot{l}_C(\alpha; t)}{\sqrt{I(\alpha; t)}} \leq q_\sigma \right\}.$$

Luottamusväli asteikkoparametrille β :

Vastaavalla päättelyllä kuin yhden aineiston kohdalla, saadaan $100(1 - \sigma)\%$:n luottamusväli β :lle annetulla α :n arvolla kaavasta

$$(4.3.38) \quad \left[\frac{\chi_{\sigma/2}^2(2n)}{2 \sum_{i=1}^m t_0^\alpha}, \frac{\chi_{1-\sigma/2}^2(2(n+1))}{2 \sum_{i=1}^m t_0^\alpha} \right].$$

Luottamusjoukko (α, β) :lle:

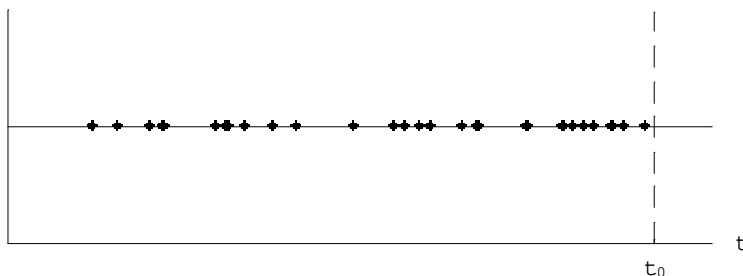
Vastaavasti kuin yhden aineiston tapauksessa muodostetaan ensin $100(1 - \sigma / 2)\%$:n luottamusväli α :lle kaavan (4.3.37) avulla. Tämän jälkeen muodostetaan kutakin tälle välille kuuluvaa α :n arvoa vastaava $100(1 - \sigma / 2)\%$:n luottamusväli parametrille β kaavan (4.3.38) avulla. Näin saatu joukko on (α, β) :n $100(1 - \sigma)\%$:n luottamusjoukko.

4.3.3 Kunnossapidon vaikutus korjattavan järjestelmän vikatiedon tilastolliseen käsittelyyn

Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa yksi ainoa järjestelmä asetetaan toimintaan hetkellä 0. Vikaantumisaajat ja havainnoinnin lopettamisaika ovat:

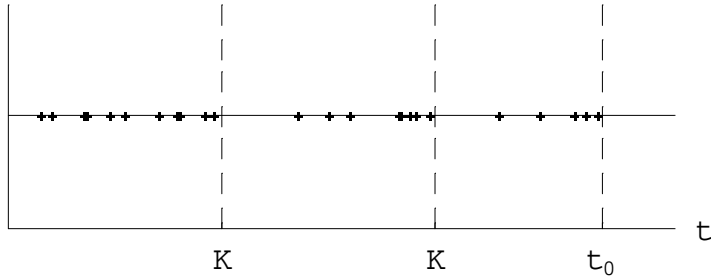
$$0 < t_1 < \dots < t_r < t_0.$$

Tilanne on kuvattu kuvassa 4.3. Kyseessä on oikeastaan edellisen kappaleen kuvaaman tilanteen erikoistapaus, eli tapaus, jossa $m = 1$.



Kuva 4.3. Yksi aikasensuroitu järjestelmä.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa samaa järjestelmää havainnoidaan sama aika kuin edellä. Erotuksena on nyt se, että järjestelmälle suoritetaan kunnossapito säännöllisin väliajoin. Tilannetta kuvaa kuva 4.4.

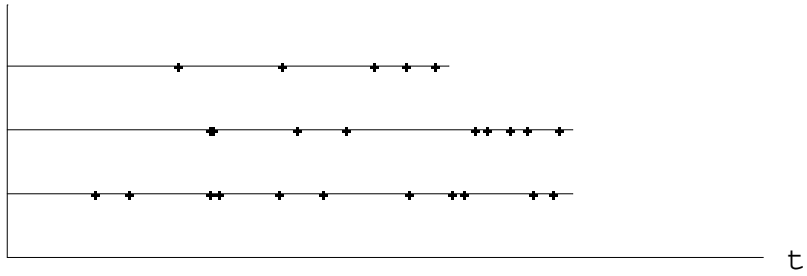


Kuva 4.4. Kunnossapito yhdelle järjestelmälle.

HUOM. Koska tässä esityksessä ei käsitellä epätäydellisen korjauksen mallia, on syytä tehdä seuraava täsmennys:

- Vikaantumisen yhteydessä suoritetaan vähimmäiskorjaus, eli järjestelmän toimintatodennäköisyys on sama ennen korjausta ja korjauksen jälkeen. Järjestelmä siis palautetaan vanhaa vastaavaan kuntoon.
- Kunnossapidon yhteydessä suoritetaan täydellinen korjaus, eli järjestelmä palautuu uutta vastaavaan kuntoon.

Koska järjestelmä kunnossapidon yhteydessä palautuu uutta vastaavaan kuntoon, voidaan ajatella kunkin kunnossapitojakson olevan oma muista riippumaton järjestelmänsä. Tilanne vastaa edellisen kappaleen tilannetta seuraavasti: Merkitään K_k :lla k :nnetta kunnossapitoa. i :s järjestelmä (kunnossapitojakso) aloittaa toimintansa hetkellä K_{i-1} (määritellään $K_0 = 0$) ja i :nnen järjestelmän (kunnossapitojakson) havainnointi lopetetaan hetkellä K_i . Siirretään nyt samoin kuin edellä kukin kunnossapitojakso alkamaan hetkestä 0. Huomataan, että kyseessä on edellisen kappaleen riippumattomien järjestelmien erikoistapaus. Muuten tilanne on täysin vastaava, mutta nyt tilannetta yksinkertaistaa se, että kunkin järjestelmän (paitsi ehkä viimeisen) havainnointiaika on sama. Siirretyt ajat on esitetty kuvassa 4.5.



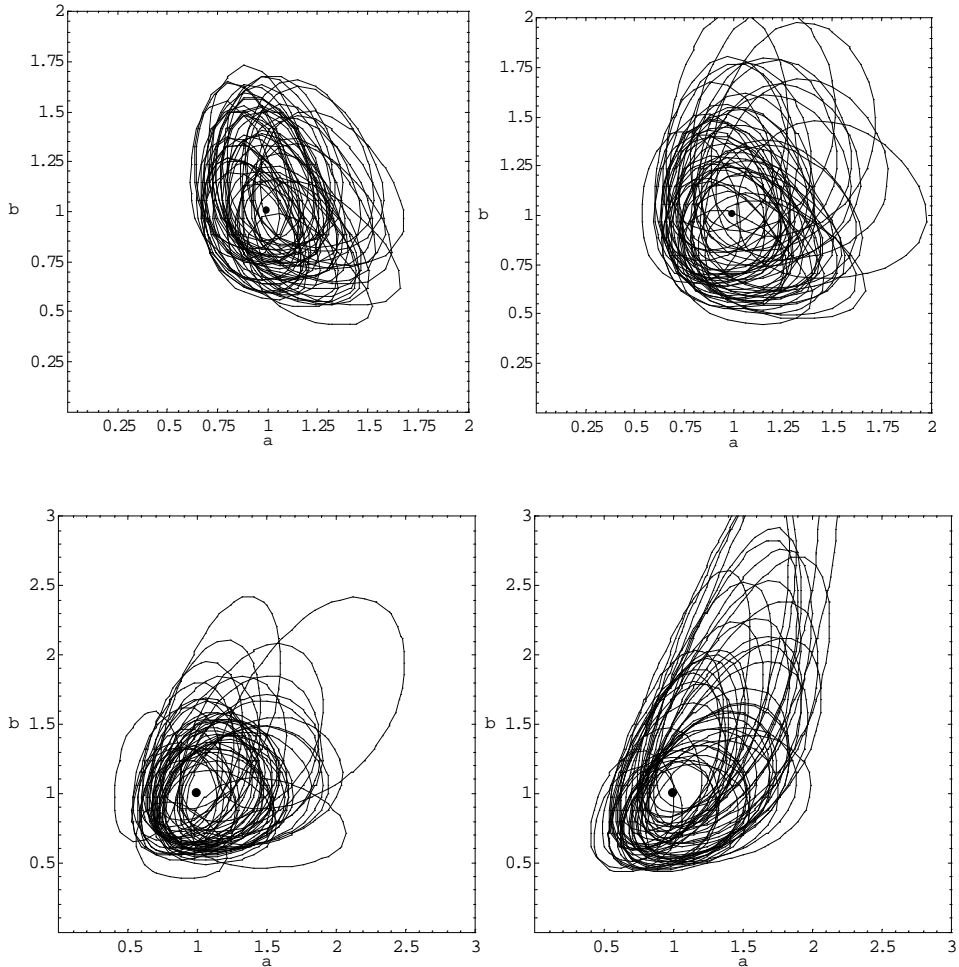
Kuva 4.5. Kunnossapitojaksojen aloitusajat siirrettyinä origoon.

5. Sensuroinnin vaikutus estimointiin

Tämän esityksen tarkoituksena on tutkia erityisesti sensuroinnin vaikutusta vikadataan, tarkemmin sensuroinnin vaikutusta aineistosta estimoitujen parametrien luottamusväleihin silloin, kun taustalla oleva jakauma oletetaan kaksiparametriseksi Weibull-jakaumaksi tai vikaantumisprosessin oletetaan olevan ns. Weibull-prosessin kaltainen. Koska reaali maailmassa havainto-aineistoon vaikuttaa lukuisia sotkevia tekijöitä kuten ympäristön vaikutukset, datankeruuhenkilöstön erilaiset toimintatavat, mittausvirheet (sekä systemaattiset että satunnaiset) ym., suoritetaan testaus sensuroinnin vaikutusten selvittämiseksi simuloidusta datasta. Tällöin taustalla oleva jakauma tai prosessi tunnetaan täysin, sensurointia voidaan kontrolloida halutun asteiseksi eikä dataan pääse vaikuttamaan edellämainittuja sotkevia tekijöitä.

On syytä korostaa, että simuloidut aineistot ovat vain yksittäisiä otoksia joko kokoa $n = 50$ tai $n = 100$. Tietysti yhden aineiston kohdalla on muistettava, että satunnaisvaihtelun osuus on suuri. Tarkoituksena onkin näyttää, mitä yhdestä aineistosta voidaan sanoa koskien taustalla olevaa jakaumaa varsinkin silloin, kun otokseen sisältyy sensurointia. Vaikka yksittäisissä otoksissa satunnaisvaihtelun osuus on suuri koskien luottamus- ja uskottavuusjoukkojen paikkaa ja muotoa, näkyy yhdessäkin otoksessa hyvin se, kuinka sensurointi kasvattaa näiden joukkojen kokoa. Valinta yksittäistapausten esittämisestä perustuu siihen, että käytännön tilanteissa käytettävissä on yleensä vain vähän dataa, useimmiten vain yksi "otos".

Tarkastellaan asiaa hieman yleisemmin ennen esimerkkiaineistojen esittämistä. On simuloitu 50 riippumatonta otosta kokoa 50 Weibull(1,1)-jakaumasta. Kullekin otokselle on muodostettu 95%:n luottamusjoukko parametrille (α, β) . Kuvassa 5.1 on piirretty kyseinen luottamusjoukko kaikille otoksille. Oikea parametrin arvo $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ on merkitty kuvaan pisteellä.



Kuva 5.1. Luottamusjoukot 50 aineistolle, sensurointiasteina 0 %, 20 %, 35 % ja 50 %.

Kuvasta nähdään, kuinka joukkojen koko ja muoto vaihtelevat otoksesta toiseen. Kuvasta nähdään myös se, että oikea parametrinarvo ei osu kaikkien luottamusjoukkojen rajojen sisäpuolelle. Tämä on seurausta satunnaisvaihtelusta. Jos otoksia simuloitaisiin lisää, saataisiin kuva, jossa keskimäärin 95 % luottamusjoukoista sisältäisi oikean parametrinarvon ja keskimäärin 5 % ei sisältäisi. Kappaleessa 5.1 esitettyjä aineistoja

tarkasteltaessa onkin syytä pitää mielessä, että kyseessä on aina vain yksittäinen poiminto kuvan 5.1 kaltaisesta “röykkiöstä”.

Tämän luvun kaikki simuloinnit, laskut ja grafiikka on toteutettu Mathematica 3.0 -ohjelmistolla. Analyysin suorittamiseksi ohjelmoidun koodin saa tarvittaessa kirjoittajalta. (Huom. joissain luottamus- ja uskottavuusjoukkoja esittävässä kuvissa näkyy virheellisesti vain uloin tasa-arvokäyräkartta, tämä johtuu Mathematican piirustusominaisuuksista.)

5.1 Weibull-jakauman parametrien ja luottamus- ja uskottavuusjoukot

Sensuroinnin vaikutuksen tarkastelu on jakuman osalta suoritettu seuraavasti:

1. On simuloitu yksi aineisto (otoskoko $n = 100$ tai $n = 50$) Weibull-jakaumasta halutuina parametreina α ja β .
2. Parametreille α ja β on laskettu suurimman uskottavuuden estimaatit ratkaisemalla uskottavuusyhtälöt (4.2.7) ja (4.2.8) sensurointiasteina 0 %, 20 %, 35 % ja 50 %. Esimerkiksi sadan yksikön otoksessa koe on lopetettu kun 100, 80, 65, 50 yksikköä on vikaantunut. (Koska koe on lopetettu, kun haluttu osuus yksiköitä on vikaantunut, on kysymyksessä tyyppi II sensurointi.)
3. Parametrien α ja β elliptiset luottamusjoukot on piirretty kaavan (4.2.15) mukaisesti luottamustasoina 99 %, 95 %, 90 %, 80 % ja 70 %, samoilla sensurointiasteilla kuin kohdassa 2.
4. Parametrien α ja β elliptiset uskottavuusjoukot on piirretty kaavan (4.2.12) mukaisesti uskottavuustasoin 1 %, 10 % ja 50 % samoin sensurointiastein kuin kohdassa 2.

5. Parametrille α (muotoparametri) on laskettu luottamusvälit kaavan (4.2.16) mukaisesti luottamustasoina 99 %, 95 %, 90 %, 80 % ja 70 %, samoilla sensurointiasteilla kuin kohdassa 2.
6. Parametrille α (muotoparametri) on laskettu uskottavuusvälit kaavan (4.2.14) mukaisesti uskottavuustasoina 1 %, 10 % ja 50 %, samoilla sensurointiasteilla kuin kohdassa 2.
7. estimoidulle jakaumalle on laskettu odotusarvo $\hat{E}[X]$ ja varianssi $\hat{D}^2[X]$

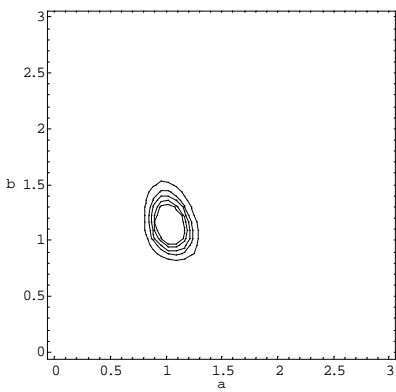
Tulokset on koottu seuraaville sivuille siten, että kustakin aineistosta esitetään ensin tasa-arvokäyräkartat ja sen jälkeen parametreja koskevat numeeriset tiedot koottuna taulukoksi. Taulukoissa on merkitty kunkin välin alle sen pituus helpottamaan vertailua. Kuvia vertailtaessa on hyvä huomata, että asteikot eivät ole kaikissa kuvissa samanlaiset.

5.1.1 Simuloidut aineistot

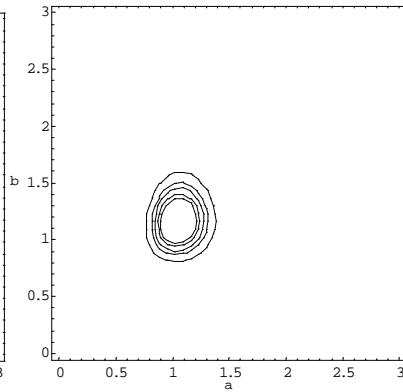
Aineisto 1 ($\alpha = 1, \beta = 1, E[x] = 1, D^2[x] = 1, n = 100$)

LUOTTAMUSJOUKOT

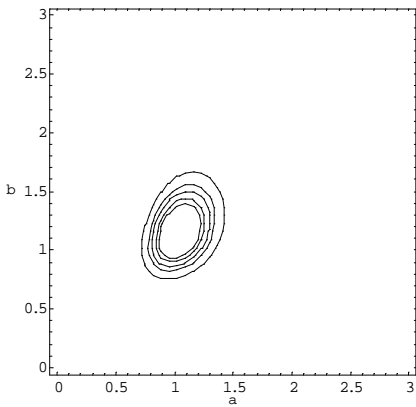
ei sensurointia



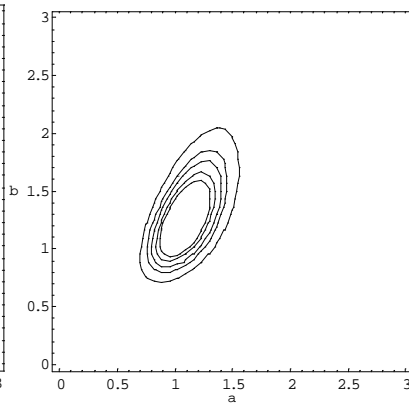
sensurointi 20%



sensurointi 35%

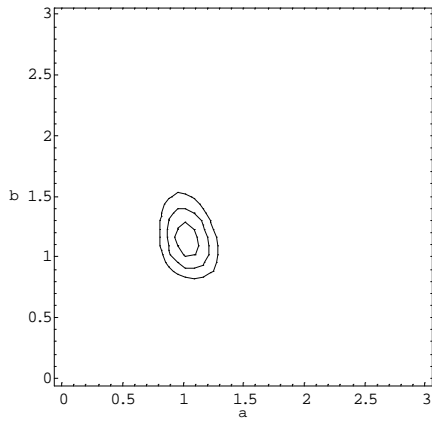


sensurointi 50%

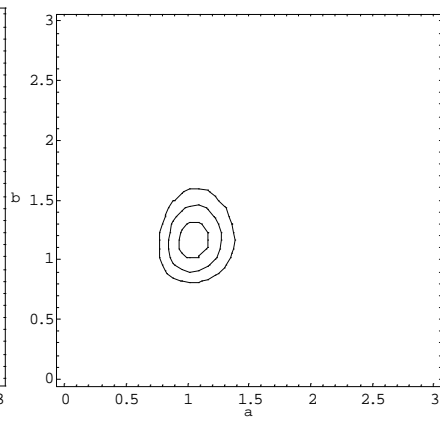


USKOTTAVUUSJOUKOT

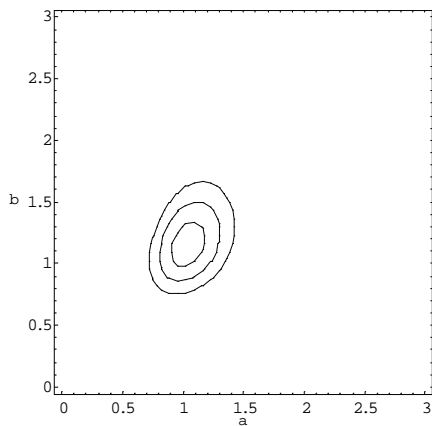
ei sensurointia



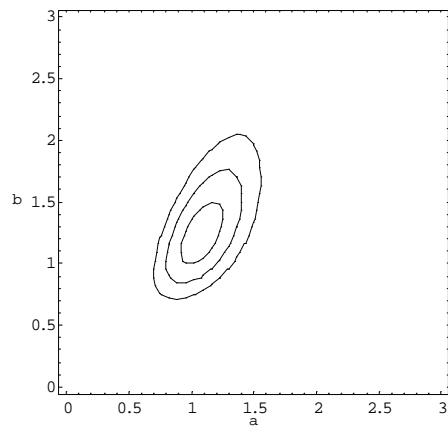
sensurointi 20%



sensurointi 35%



sensurointi 50%



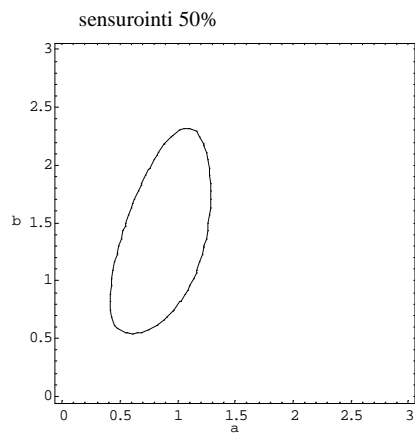
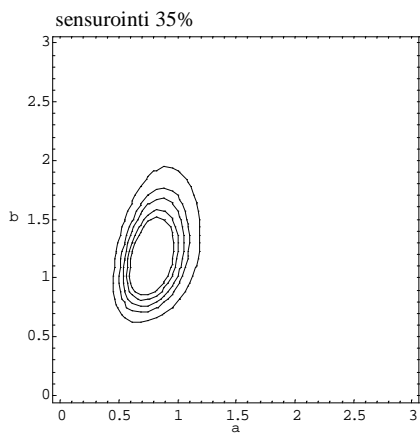
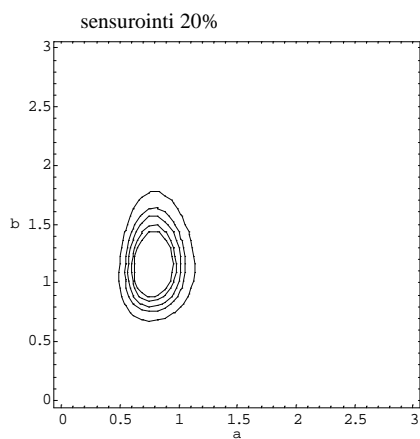
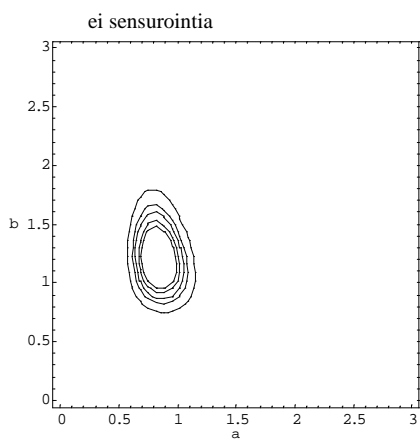
	EI SENSUROINTIA	SENSUROINTI 20%	SENSUROINTI 35%	SENSUROINTI 50%
$\hat{\alpha}$	1.03	1.05	1.04	1.07
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(0.835 , 1.25) 0.415	(0.805 , 1.33) 0.525	(0.765 , 1.36) 0.595	(0.748 , 1.47) 0.722
luottamustaso 95%	(0.88 , 1.20) 0.32	(0.859 , 1.26) 0.401	(0.825 , 1.28) 0.455	(0.819 , 1.37) 0.551
luottamustaso 90%	(0.904 , 1.17) 0.266	(0.888 , 1.22) 0.332	(0.857 , 1.24) 0.383	(0.857 , 1.32) 0.463
luottamustaso 80%	(0.931 , 1.14) 0.209	(0.921 , 1.18) 0.259	(0.895 , 1.19) 0.295	(0.902 , 1.26) 0.358
luottamustaso 70%	(0.950 , 1.12) 0.17	(0.945 , 1.15) 0.205	(0.921 , 1.16) 0.239	(0.933 , 1.22) 0.287
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(0.802 , 1.29) 0.488	(0.766 , 1.38) 0.614	(0.722 , 1.42) 0.698	(0.698 , 1.55) 0.852
uskottavuustaso 10%	(0.866 , 1.21) 0.344	(0.843 , 1.28) 0.437	(0.807 , 1.30) 0.493	(0.797 , 1.40) 0.603
uskottavuustaso 50%	(0.939 , 1.13) 0.191	(0.931 , 1.17) 0.239	(0.906 , 1.18) 0.274	(0.915 , 1.25) 0.335

$\hat{\beta}$	1.14	1.16	1.15	1.23
---------------	------	------	------	------

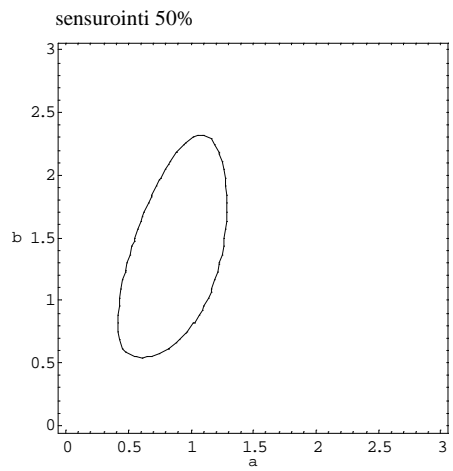
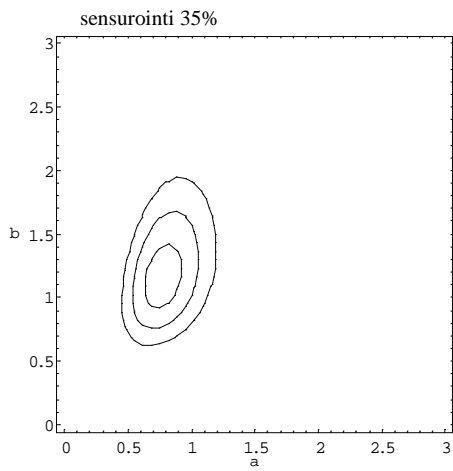
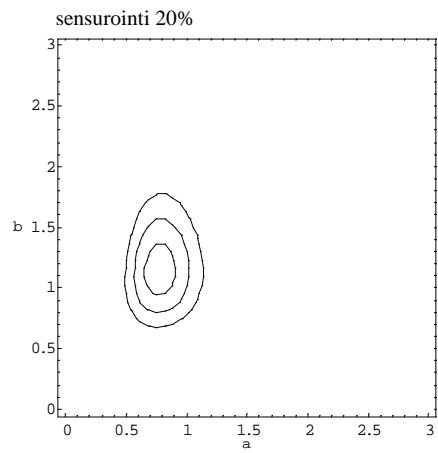
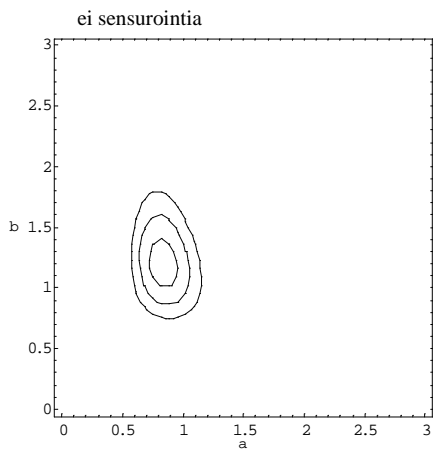
ODOTUSARVO $\hat{E}[x]$	0.868	0.849	0.859	0.794
VARIANSSI $\hat{D}^2[x]$	0.708	0.659	0.688	0.549

Aineisto 2 ($\alpha = 1, \beta = 1, E[x] = 1, D^2[x] = 1, n = 50$)

LUOTTAMUSJOUKOT



USKOTTAVUUSJOUKOT



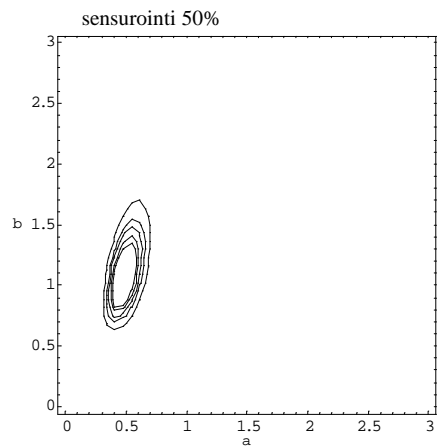
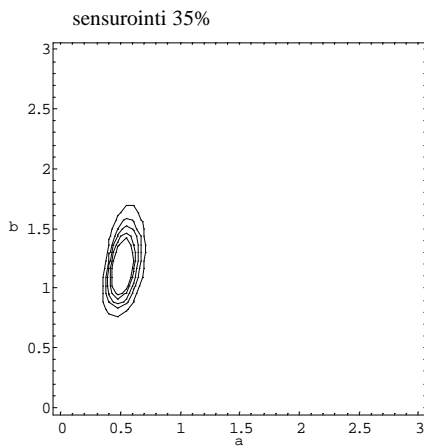
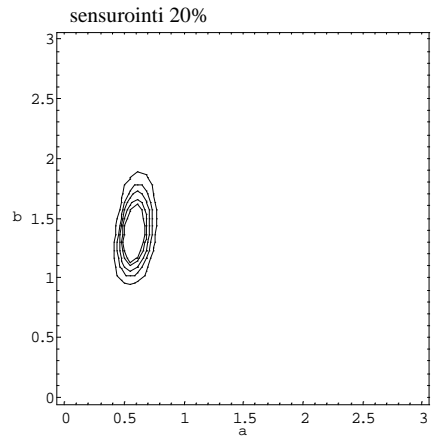
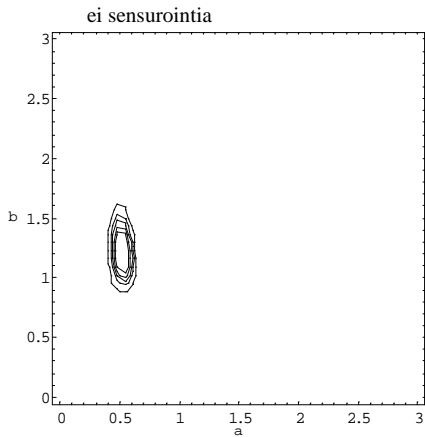
	EI SENSUROINTIA	SENSUROINTI 20%	SENSUROINTI 35%	SENSUROINTI 50%
$\hat{\alpha}$	0.834	0.776	0.768	0.774
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(0.608 , 1.10) 0.492	(0.532 , 1.08) 0.548	(0.494 , 1.12) 0.626	(0.46 , 1.20) 0.740
luottamustaso 95%	(0.658 , 1.03) 0.372	(0.585 , 0.999) 0.414	(0.552 , 1.03) 0.478	(0.526 , 1.09) 0.564
luottamustaso 90%	(0.685 , 0.999) 0.314	(0.614 , 0.961) 0.347	(0.584 , 0.984) 0.400	(0.562 , 1.03) 0.468
luottamustaso 80%	(0.716 , 0.961) 0.245	(0.648 , 0.918) 0.270	(0.622 , 0.933) 0.311	(0.605 , 0.97) 0.365
luottamustaso 70%	(0.738 , 0.936) 0.198	(0.671 , 0.889) 0.218	(0.649 , 0.90) 0.251	(0.635 , 0.931) 0.296
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(0.572 , 1.15) 0.578	(0.494 , 1.14) 0.646	(0.452 , 1.19) 0.738	(0.415 , 1.29) 0.875
uskottavuustaso 10%	(0.643 , 1.05) 0.407	(0.569 , 1.02) 0.451	(0.534 , 1.06) 0.526	(0.505 , 1.12) 0.615
uskottavuustaso 50%	(0.726 , 0.951) 0.225	(0.657 , 0.906) 0.249	(0.633 , 0.919) 0.286	(0.618 , 0.953) 0.335

$\hat{\beta}$	1.20	1.14	1.15	1.16
---------------	------	------	------	------

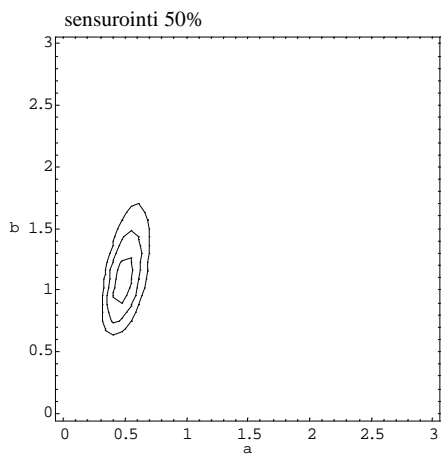
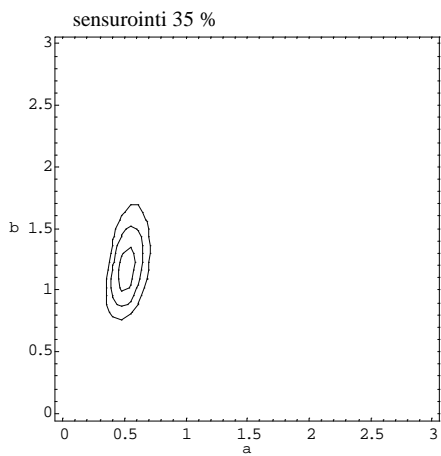
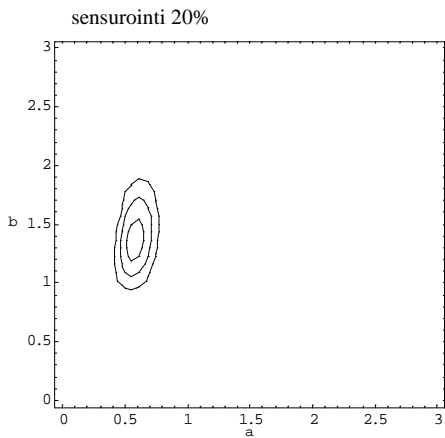
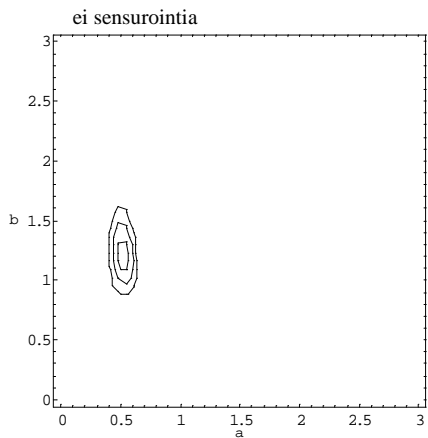
ODOTUSARVO $\hat{E}[x]$	0.921	1.02	1.02	1.00
VARIANSSI $\hat{D}^2[x]$	1.23	1.76	1.8	1.71

Aineisto 3 ($\alpha = 0,5$, $\sigma = 1$, $E[x] = 2$, $D[x] = 20$, $n = 100$)

LUOTTAMUSJOUKOT



USKOTTAVUUSJOUKOT



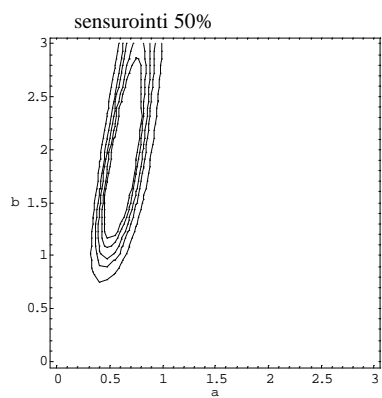
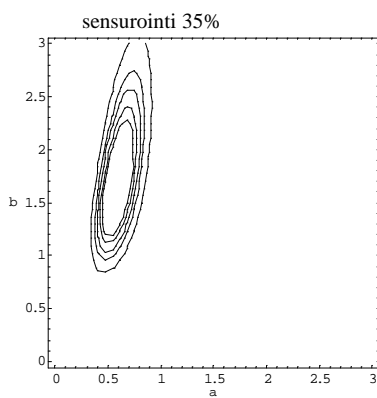
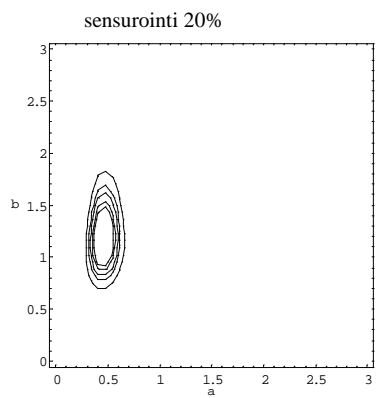
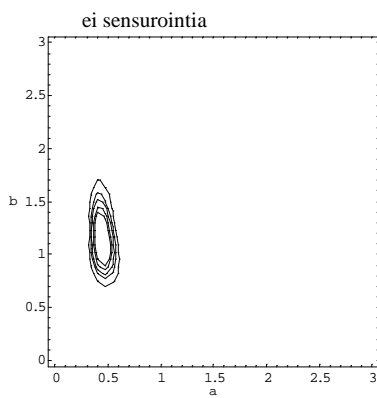
	EI SENSUROINTI A	SENSUROINTI 20%	SENSUROINTI 35%	SENSUROINTI 50%
$\hat{\alpha}$	0.517	0.58	0.513	0.48
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(0.418 , 0.626) 0.208	(0.443 , 0.74) 0.297	(0.377 , 0.676) 0.299	(0.334 , 0.661) 0.327
luottamustaso 95%	(0.441 , 0.599) 0.158	(0.473 , 0.699) 0.226	(0.407 , 0.635) 0.228	(0.366 , 0.614) 0.248
luottamustaso 90%	(0.453 , 0.585) 0.132	(0.49 , 0.679) 0.189	(0.423 , 0.614) 0.191	(0.383 , 0.591) 0.208
luottamustaso 80%	(0.467 , 0.57) 0.103	(0.509 , 0.656) 0.147	(0.442 , 0.591) 0.149	(0.403 , 0.565) 0.162
luottamustaso 70%	(0.476 , 0.56) 0.084	(0.522 , 0.641) 0.119	(0.455 , 0.575) 0.120	(0.417 , 0.548) 0.131
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(0.402 , 0.646) 0.244	(0.421 , 0.771) 0.350	(0.356 , 0.708) 0.352	(0.311 , 0.697) 0.386
uskottavuustaso 10%	(0.434 , 0.607) 0.173	(0.464 , 0.711) 0.247	(0.398 , 0.647) 0.249	(0.356 , 0.628) 0.272
uskottavuustaso 50%	(0.471 , 0.565) 0.094	(0.514 , 0.65) 0.136	(0.448 , 0.584) 0.136	(0.409 , 0.558) 0.149

$\hat{\beta}$	1.21	1.36	1.16	1.06
---------------	------	------	------	------

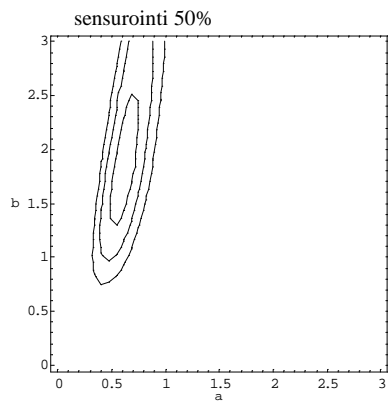
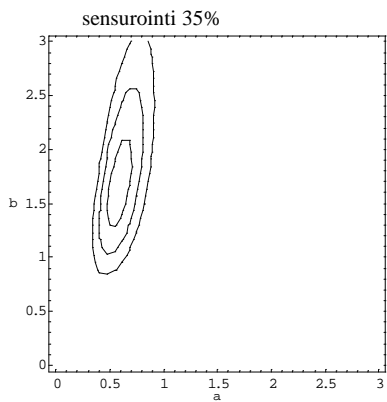
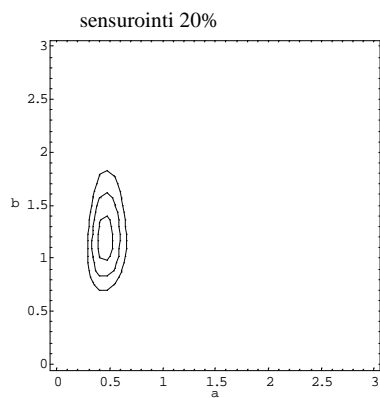
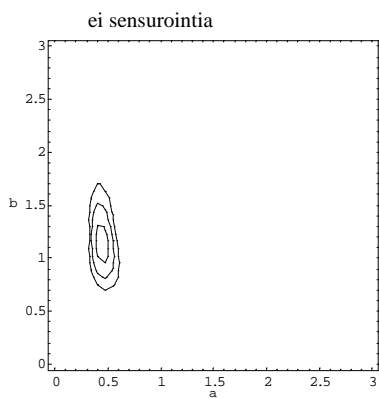
ODOTUSARVO $\hat{E}[x]$	1.55	1.16	1.64	2.05
VARIANSSI $\hat{D}^2[x]$	11.0	4.54	12.5	23.6

Aineisto 4 ($\alpha = 0,5$ $\beta = 1$, $E[x] = 2$, $D^2[x] = 20$, $n = 50$)

LUOTTAMUSJOUKOT



USKOTTAVUUSJOUKOT



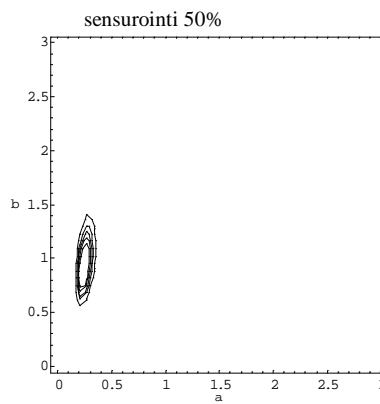
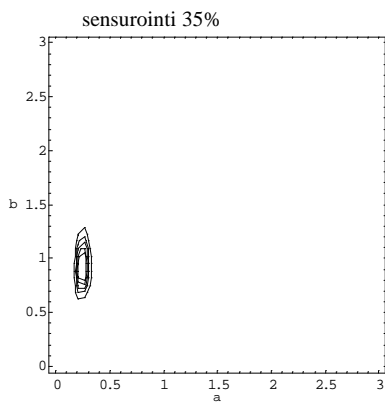
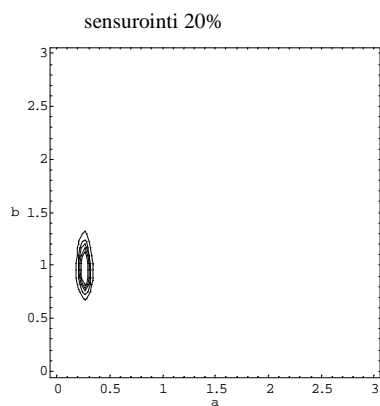
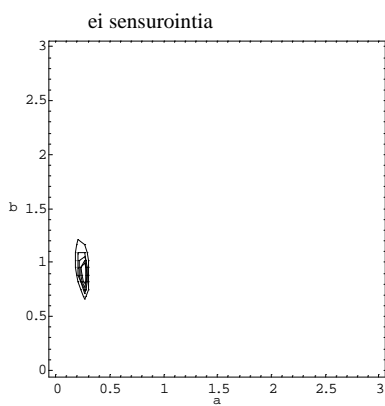
	EI SENSUROINTIA	SENSUROINTI 20%	SENSUROINTI 35%	SENSUROINTI 50%
$\hat{\alpha}$	0.445	0.454	0.584	0.608
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(0.329 , 0.579) 0.250	(0.313 , 0.625) 0.312	(0.373 , 0.857) 0.484	(0.359 , 0.948) 0.589
luottamustaso 95%	(0.355 , 0.545) 0.190	(0.344 , 0.581) 0.237	(0.418 , 0.786) 0.368	(0.411 , 0.858) 0.447
luottamustaso 90%	(0.369 , 0.528) 0.159	(0.361 , 0.559) 0.198	(0.443 , 0.751) 0.308	(0.439 , 0.814) 0.375
luottamustaso 80%	(0.385 , 0.509) 0.124	(0.380 , 0.535) 0.155	(0.472 , 0.712) 0.240	(0.473 , 0.765) 0.292
luottamustaso 70%	(0.396 , 0.497) 0.101	(0.394 , 0.519) 0.125	(0.492 , 0.686) 0.194	(0.497 , 0.733) 0.236
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(0.311 , 0.604) 0.293	(0.291 , 0.658) 0.367	(0.342 , 0.913) 0.571	(0.323 , 1.02) 0.697
uskottavuustaso 10%	(0.347 , 0.555) 0.208	(0.335 , 0.594) 0.259	(0.404 , 0.807) 0.403	(0.395 , 0.885) 0.490
uskottavuustaso 50%	(0.390 , 0.504) 0.114	(0.386 , 0.528) 0.142	(0.480 , 0.701) 0.221	(0.483 , 0.751) 0.268

$\hat{\beta}$	1.13	1.17	1.65	1.81
---------------	------	------	------	------

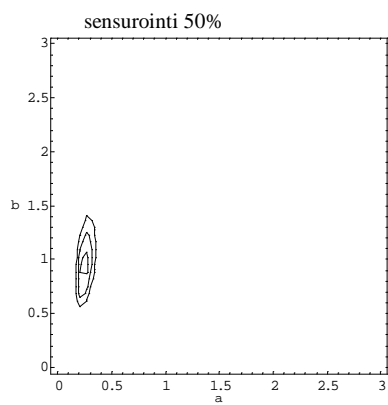
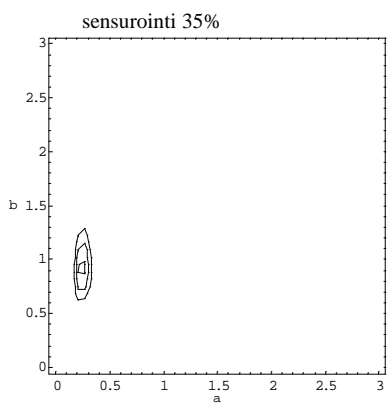
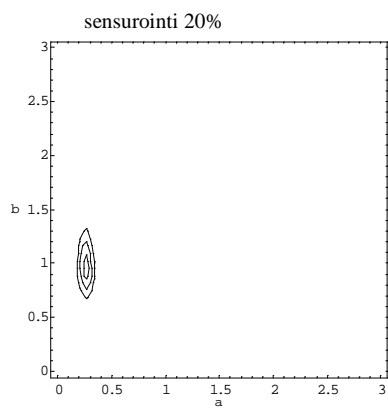
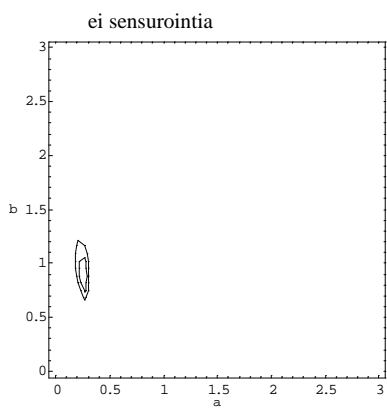
ODOTUSARVO $\hat{E}[x]$	2.25	2.07	0.946	0.817
VARIANSSI $\hat{D}^2[x]$	35.4	28.3	2.96	2.00

Aineisto 5 ($\alpha = 0.25$ $\beta = 1$, $E[x] = 24$, $D^2[x] = 39700$, $n = 100$)

LUOTTAMUSJOUKOT



USKOTTAVUUSJOUKOT



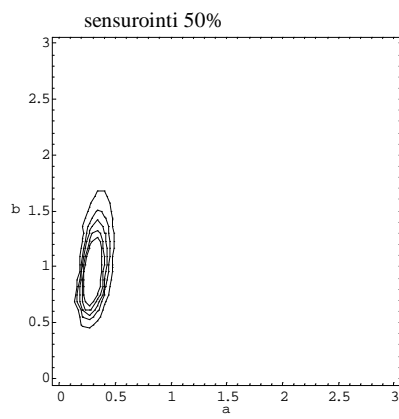
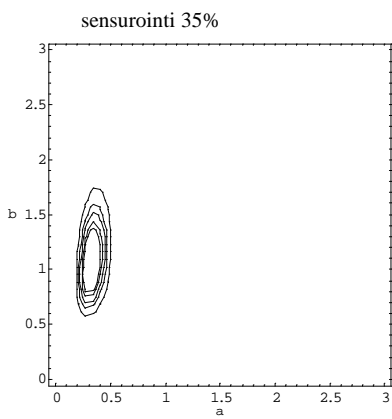
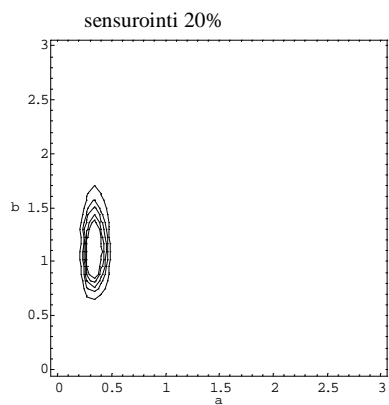
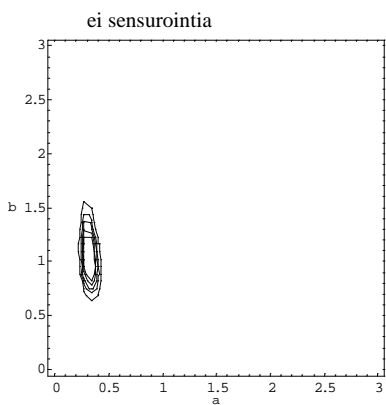
	EI SENSUROINTIA	SENSUROINTI 20%	SENSUROINTI 35%	SENSUROINTI 50%
$\hat{\alpha}$	0.249	0.259	0.242	0.242
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(0.201 , 0.302) 0.101	(0.199 , 0.33) 0.131	(0.179 , 0.319) 0.140	(0.169 , 0.332) 0.163
luottamustaso 95%	(0.212 , 0.288) 0.076	(0.212 , 0.312) 0.100	(0.193 , 0.299) 0.106	(0.184 , 0.309) 0.125
luottamustaso 90%	(0.217 , 0.282) 0.065	(0.219 , 0.303) 0.084	(0.20 , 0.289) 0.089	(0.193 , 0.297) 0.104
luottamustaso 80%	(0.224 , 0.274) 0.050	(0.228 , 0.293) 0.065	(0.209 , 0.279) 0.070	(0.203 , 0.284) 0.081
luottamustaso 70%	(0.229 , 0.269) 0.040	(0.234 , 0.286) 0.052	(0.215 , 0.271) 0.056	(0.21 , 0.276) 0.066
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(0.193 , 0.312) 0.119	(0.189 , 0.343) 0.154	(0.169 , 0.334) 0.165	(0.157 , 0.351) 0.194
uskottavuustaso 10%	(0.208 , 0.292) 0.084	(0.208 , 0.317) 0.109	(0.188 , 0.305) 0.117	(0.18 , 0.316) 0.136
uskottavuustaso 50%	(0.226 , 0.272) 0.046	(0.23 , 0.29) 0.060	(0.212 , 0.276) 0.064	(0.206 , 0.281) 0.075

$\hat{\beta}$	0.934	0.966	0.909	0.909
---------------	-------	-------	-------	-------

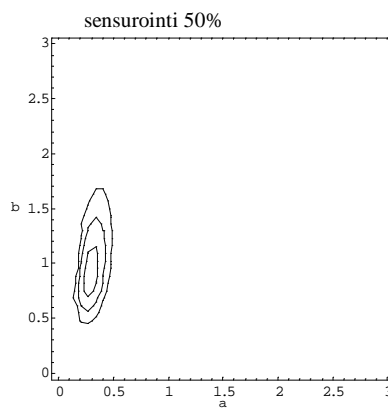
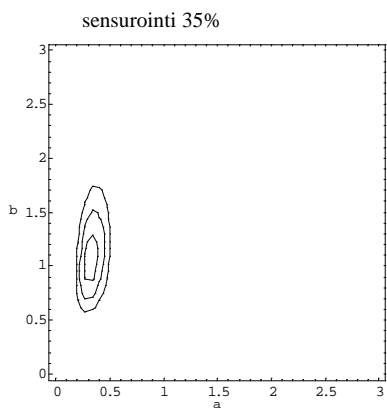
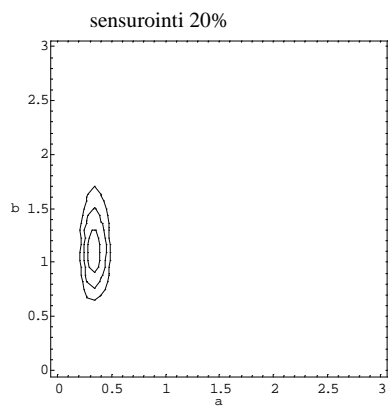
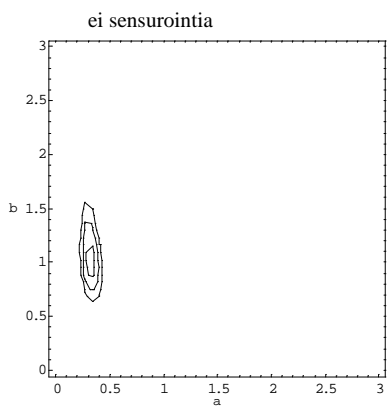
ODOTUSARVO $\hat{E}[x]$	26.6	20.1	32.1	32.7
VARIANSSI $\hat{D}^2[x]$	50200	23300	83700	88300

Aineisto 6 ($\alpha = 0.25$ $\beta = 1$, $E[x] = 24$, $D^2[x] = 39700$, $n = 50$)

LUOTTAMUSJOUKOT



USKOTTAVUUSJOUKOT



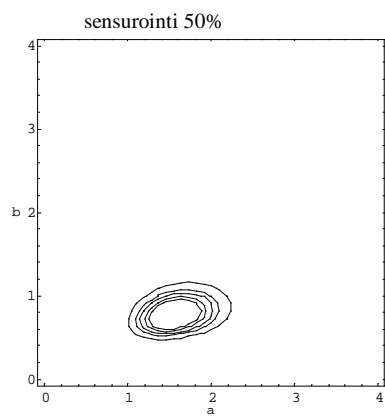
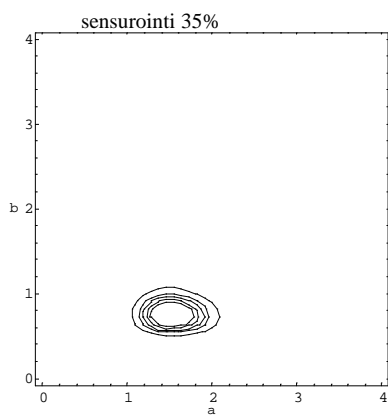
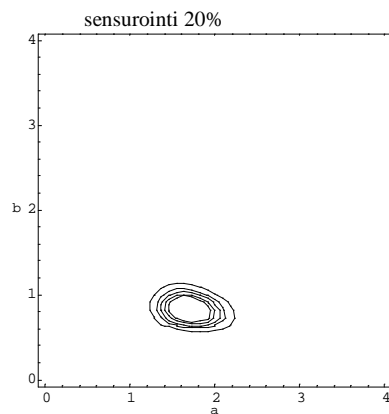
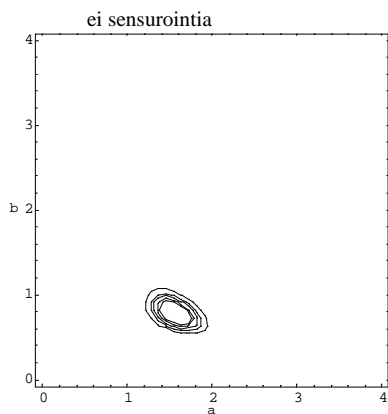
	EI SENSUROINTIA	SENSUROINTI 20%	SENSUROINTI 35%	SENSUROINTI 50%
$\hat{\alpha}$	0.317	0.333	0.322	0.291
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(0.232 , 0.415) 0.183	(0.226 , 0.466) 0.240	(0.205 , 0.475) 0.270	(0.172 , 0.453) 0.281
luottamustaso 95%	(0.251 , 0.391) 0.140	(0.249 , 0.432) 0.183	(0.23 , 0.434) 0.204	(0.197 , 0.41) 0.213
luottamustaso 90%	(0.262 , 0.378) 0.116	(0.262 , 0.415) 0.153	(0.243 , 0.415) 0.172	(0.21 , 0.389) 0.179
luottamustaso 80%	(0.273 , 0.364) 0.091	(0.276 , 0.396) 0.120	(0.259 , 0.393) 0.134	(0.226 , 0.366) 0.140
luottamustaso 70%	(0.282 , 0.355) 0.073	(0.287 , 0.383) 0.096	(0.27 , 0.379) 0.109	(0.238 , 0.351) 0.113
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(0.219 , 0.434) 0.215	(0.209 , 0.493) 0.284	(0.187 , 0.506) 0.319	(0.155 , 0.487) 0.332
uskottavuustaso 10%	(0.246 , 0.398) 0.152	(0.242 , 0.442) 0.200	(0.222 , 0.446) 0.224	(0.189 , 0.423) 0.234
uskottavuustaso 50%	(0.277 , 0.36) 0.083	(0.281 , 0.39) 0.109	(0.264 , 0.387) 0.123	(0.231 , 0.359) 0.128

$\hat{\beta}$	1.04	1.09	1.05	0.913
---------------	------	------	------	-------

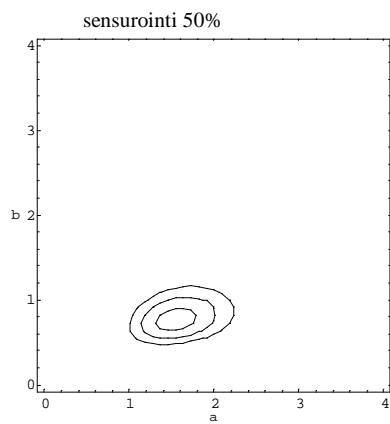
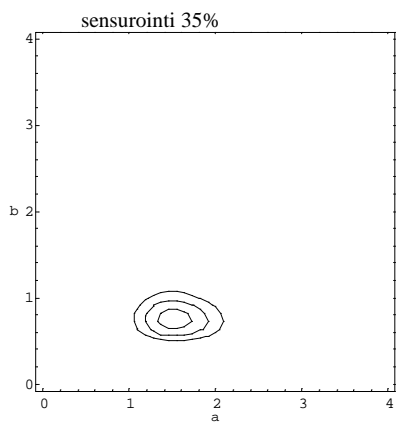
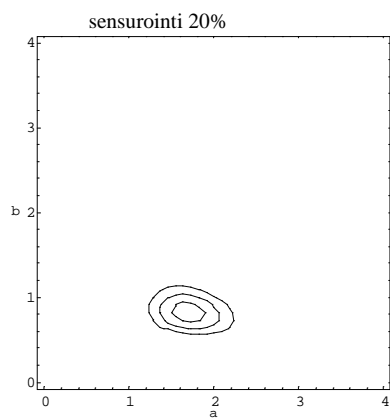
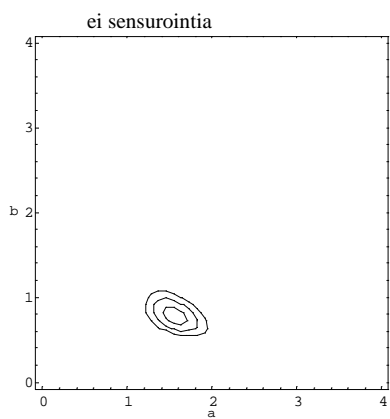
ODOTUSARVO $\hat{E}[x]$	7.03	5.54	6.59	11.7
VARIANSSI $\hat{D}^2[x]$	1140	586	951	4610

Aineisto 7 ($\alpha = 1.5$, $\beta = 1$, $E[x] = 0.903$, $D^2[x] = 0.376$, $n = 100$)

LUOTTAMUSJOUKOT



USKOTTAVUUSJOUKOT



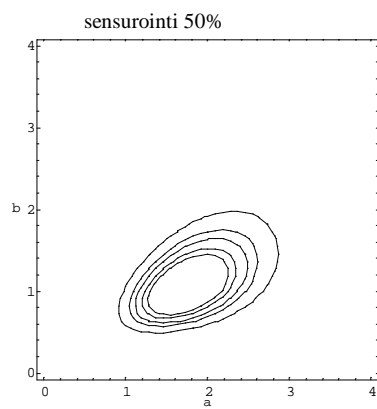
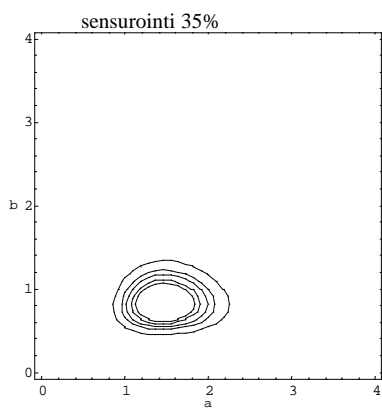
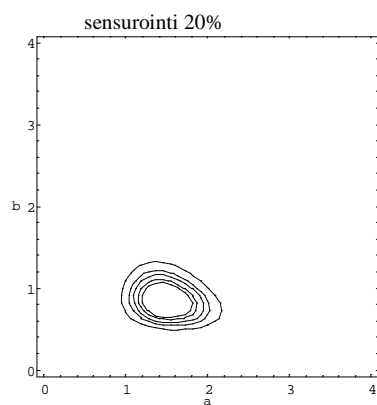
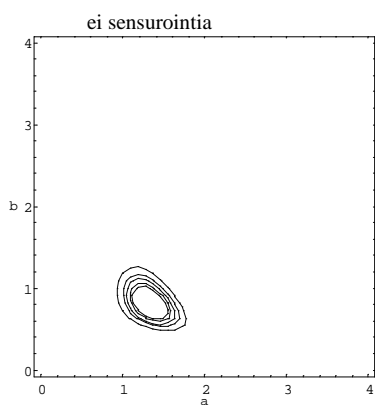
	EI SENSUROINTIA	SENSUROINTI 20%	SENSUROINTI 35%	SENSUROINTI 50%
$\hat{\alpha}$	1.56	1.69	1.52	1.54
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(1.26 , 1.89) 0.630	(1.30 , 2.15) 0.850	(1.12 , 1.99) 0.870	(1.07 , 2.12) 1.05
luottamustaso 95%	(1.33 , 1.81) 0.480	(1.39 , 2.03) 0.640	(1.21 , 1.87) 0.660	(1.17 , 1.97) 0.800
luottamustaso 90%	(1.37 , 1.77) 0.400	(1.43 , 1.98) 0.550	(1.25 , 1.81) 0.560	(1.23 , 1.90) 0.670
luottamustaso 80%	(1.41 , 1.72) 0.310	(1.49 , 1.91) 0.420	(1.31 , 1.74) 0.430	(1.29 , 1.82) 0.530
luottamustaso 70%	(1.44 , 1.69) 0.250	(1.52 , 1.87) 0.350	(1.35 , 1.70) 0.350	(1.34 , 1.76) 0.420
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(1.21 , 1.95) 0.740	(1.23 , 2.24) 1.01	(1.05 , 2.09) 1.04	(1.0 , 2.24) 1.24
uskottavuustaso 10%	(1.31 , 1.83) 0.520	(1.36 , 2.07) 0.710	(1.18 , 1.91) 0.730	(1.14 , 2.02) 0.880
uskottavuustaso 50%	(1.42 , 1.71) 0.290	(1.50 , 1.89) 0.390	(1.32 , 1.72) 0.400	(1.31 , 1.79) 0.480

$\hat{\beta}$	0.778	0.817	0.748	0.764
---------------	-------	-------	-------	-------

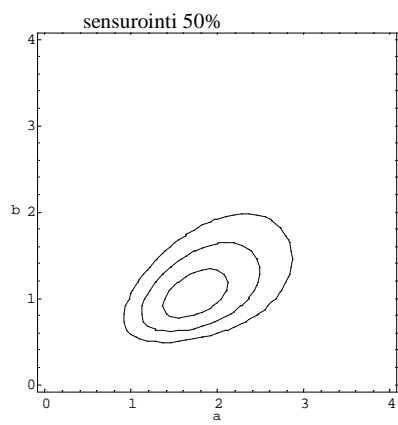
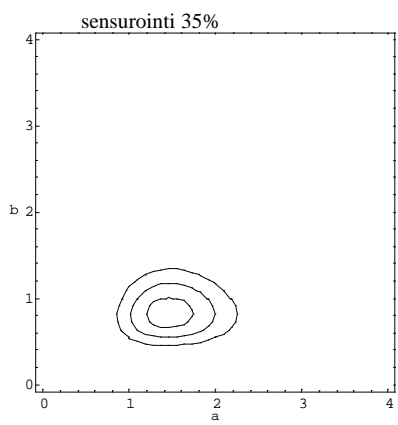
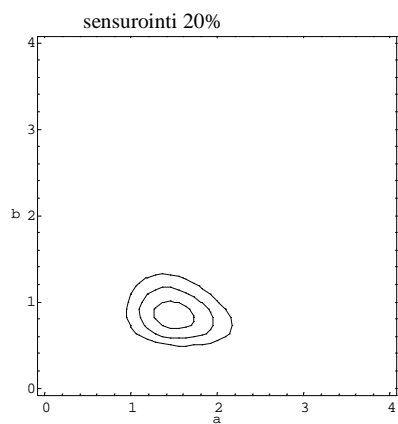
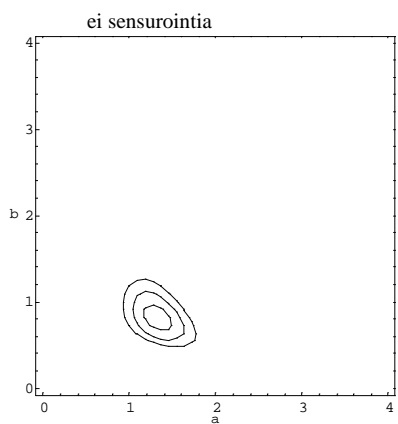
ODOTUSARVO $\hat{E}[x]$	1.15	1.09	1.20	1.18
VARIANSSI $\hat{D}^2[x]$	0.571	0.441	0.656	0.608

Aineisto 8 ($\alpha = 1.5$, $\beta = 1$, $E[x] = 0.903$, $n = 50$)

LUOTTAMUSJOUKOT



USKOTTAVUUSJOUKOT



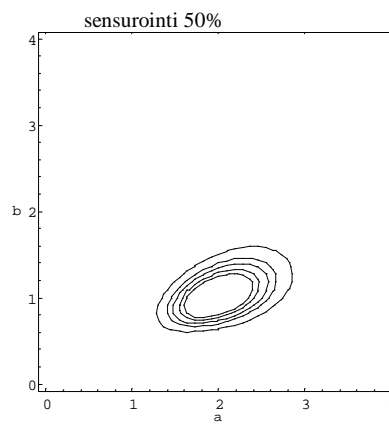
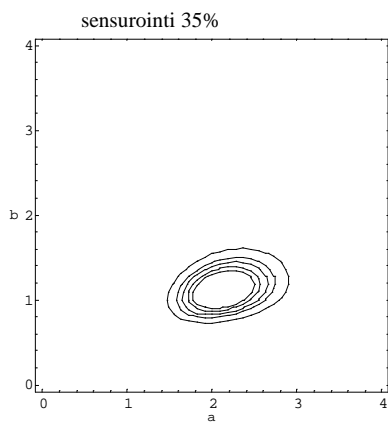
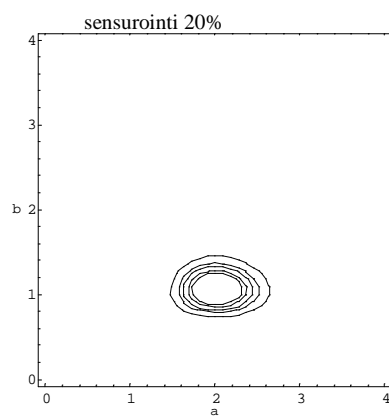
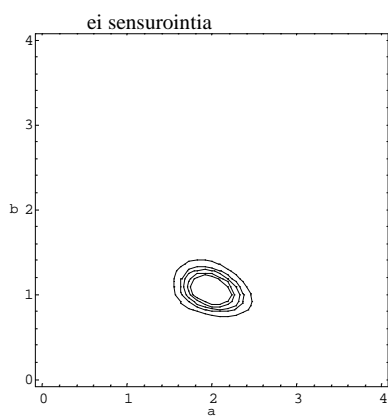
	EI SENSUROINTIA	SENSUROINTI 20%	SENSUROINTI 35%	SENSUROINTI 50%
$\hat{\alpha}$	1.33	1.48	1.45	1.71
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(0.989 , 1.70) 0.711	(1.02 , 2.06) 1.04	(0.935 , 2.11) 1.18	(1.01 , 2.66) 1.65
luottamustaso 95%	(1.07 , 1.61) 0.540	(1.12 , 1.91) 0.79	(1.05 , 1.94) 0.89	(1.16 , 2.41) 1.25
luottamustaso 90%	(1.11 , 1.56) 0.45	(1.18 , 1.84) 0.66	(1.11 , 1.86) 0.75	(1.24 , 2.29) 1.05
luottamustaso 80%	(1.15 , 1.51) 0.36	(1.24 , 1.75) 0.51	(1.18 , 1.76) 0.58	(1.34 , 2.15) 0.81
luottamustaso 70%	(1.19 , 1.47) 0.28	(1.28 , 1.70) 0.42	(1.23 , 1.70) 0.47	(1.40 , 2.06) 0.66
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(0.933 , 1.77) 0.837	(0.947 , 2.17) 1.22	(0.857 , 2.25) 1.39	(0.914 , 2.86) 1.95
uskottavuustaso 10%	(1.04 , 1.64) 0.600	(1.09 , 1.95) 0.86	(1.01 , 1.99) 0.98	(1.12 , 2.48) 1.36
uskottavuustaso 50%	(1.17 , 1.49) 0.320	(1.26 , 1.73) 0.47	(1.20 , 1.74) 0.54	(1.36 , 2.11) 0.75

$\hat{\beta}$	0.809	0.839	0.82	1.03
---------------	-------	-------	------	------

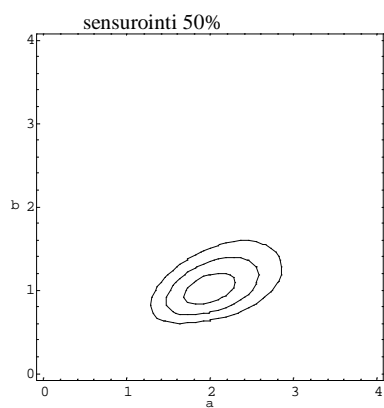
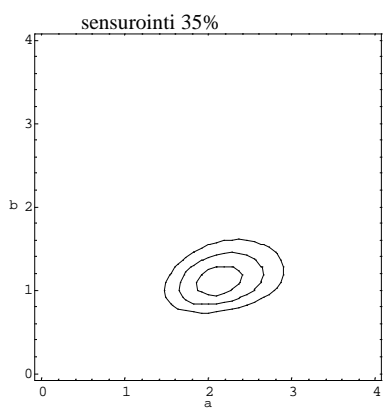
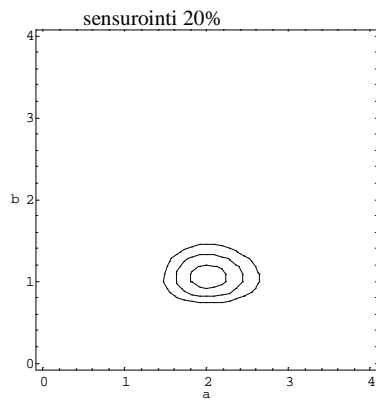
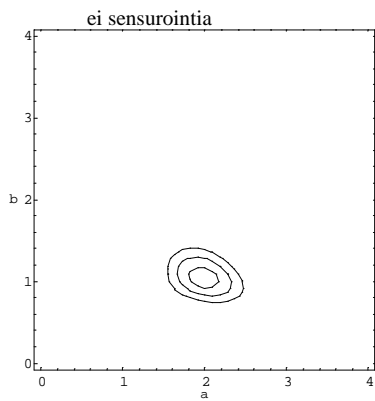
ODOTUSARVO $\hat{E}[x]$	1.14	1.08	1.11	0.867
VARIANSSI $\hat{D}^2[x]$	0.75	0.546	0.599	0.272

Aineisto 9 ($\alpha = 2, \beta = 1, E[x] = 0.886, D^2[x] = 0.225, n = 100$)

LUOTTAMUSJOUKOT



USKOTTAVUUSJOUKOT



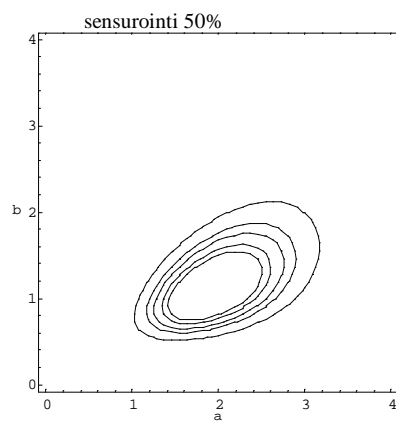
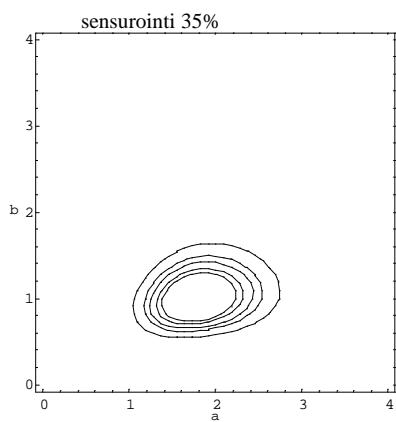
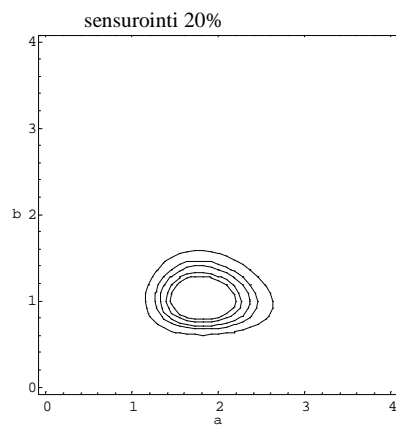
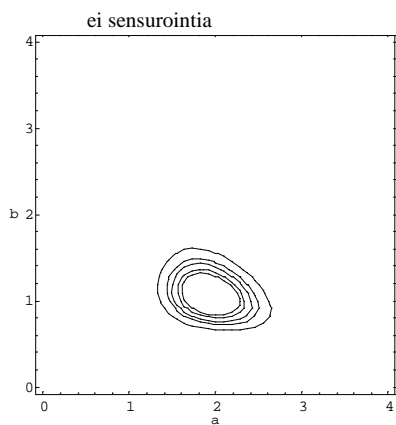
	EI SENSUROINTIA	SENSUROINTI 20%	SENSUROINTI 35%	SENSUROINTI 50%
$\hat{\alpha}$	1.98	2.01	2.11	1.97
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(1.61 , 2.40) 0.790	(1.55 , 2.54) 0.990	(1.56 , 2.78) 1.22	(1.37 , 2.71) 1.34
luottamustaso 95%	(1.69 , 2.29) 0.600	(1.65 , 2.41) 0.760	(1.68 , 2.61) 0.930	(1.50 , 2.52) 1.02
luottamustaso 90%	(1.74 , 2.24) 0.500	(1.71 , 2.34) 0.630	(1.75 , 2.52) 0.770	(1.57 , 2.42) 0.850
luottamustaso 80%	(1.79 , 2.18) 0.390	(1.77 , 2.27) 0.500	(1.82 , 2.43) 0.610	(1.66 , 2.32) 0.660
luottamustaso 70%	(1.83 , 2.14) 0.310	(1.82 , 2.22) 0.400	(1.88 , 2.37) 0.490	(1.71 , 2.25) 0.540
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(1.54 , 2.47) 0.930	(1.47 , 2.65) 1.18	(1.47 , 2.91) 1.44	(1.28 , 2.86) 1.58
uskottavuustaso 10%	(1.67 , 2.32) 0.650	(1.62 , 2.45) 0.830	(1.64 , 2.66) 1.02	(1.46 , 2.57) 1.11
uskottavuustaso 50%	(1.81 , 2.17) 0.360	(1.79 , 2.25) 0.460	(1.85 , 2.40) 0.550	(1.68 , 2.29) 0.610

ML β	1.04	1.05	1.11	1.00
------------	------	------	------	------

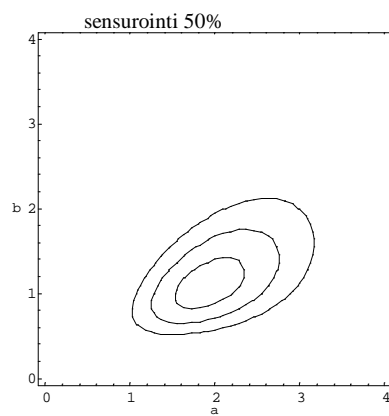
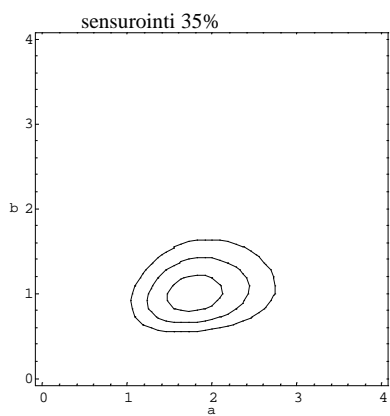
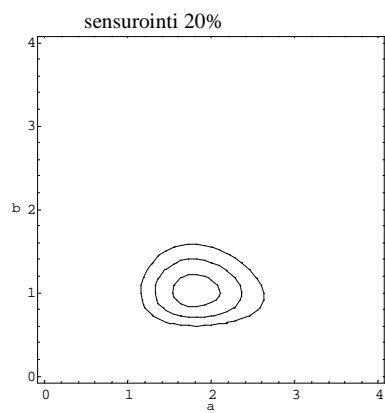
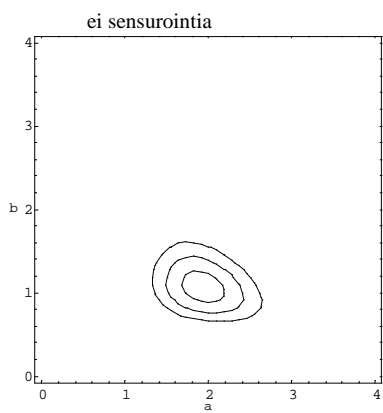
ODOTUSARVO $\hat{E}[x]$	0.85	0.84	0.8	0.885
VARIANSSI $\hat{D}^2[x]$	0.201	0.191	0.158	0.22

Aineisto 10 ($\alpha = 2, \beta = 1, E[x] = 0.886, D^2[x] = 0.225, n = 50$)

LUOTTAMUSJOUKOT



USKOTTAVUUSJOUKOT



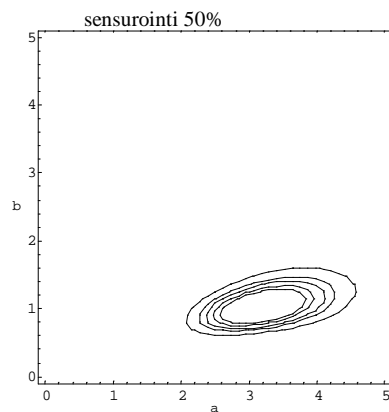
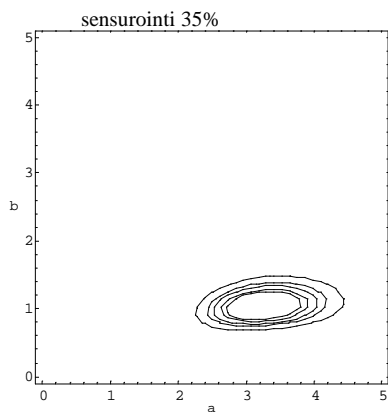
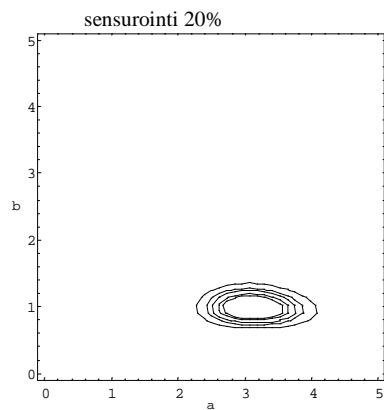
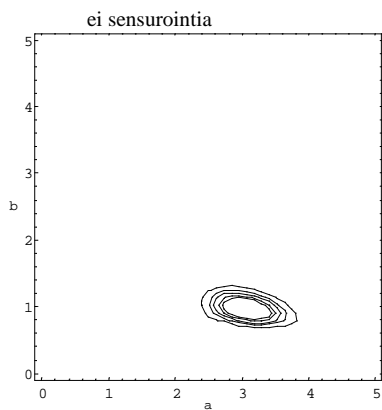
	EI SENSUROINTIA	SENSUROINTI 20%	SENSUROINTI 35%	SENSUROINTI 50%
$\hat{\alpha}$	1.93	1.8	1.77	1.91
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(1.41 , 2.53) 1.12	(1.24 , 2.49) 1.25	(1.14 , 2.58) 1.44	(1.13 , 2.95) 1.82
luottamustaso 95%	(1.53 , 2.38) 0.850	(1.36 , 2.31) 0.950	(1.28 , 2.37) 1.09	(1.30 , 2.67) 1.37
luottamustaso 90%	(1.59 , 2.30) 0.710	(1.43 , 2.22) 0.790	(1.35 , 2.27) 0.920	(1.38 , 2.54) 1.16
luottamustaso 80%	(1.66 , 2.21) 0.550	(1.50 , 2.13) 0.630	(1.44 , 2.15) 0.710	(1.49 , 2.39) 0.900
luottamustaso 70%	(1.71 , 2.16) 0.450	(1.56 , 2.06) 0.500	(1.50 , 2.08) 0.580	(1.57 , 2.29) 0.720
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(1.33 , 2.64) 1.31	(1.15 , 2.63) 1.48	(1.05 , 2.75) 1.70	(1.02 , 3.17) 2.15
uskottavuustaso 10%	(1.49 , 2.42) 0.930	(1.32 , 2.37) 1.05	(1.23 , 2.43) 1.20	(1.25 , 2.76) 1.51
uskottavuustaso 50%	(1.68 , 2.19) 0.510	(1.53 , 2.10) 0.570	(1.46 , 2.12) 0.660	(1.52 , 2.35) 0.830

$\hat{\beta}$	1.06	1.02	0.989	1.09
---------------	------	------	-------	------

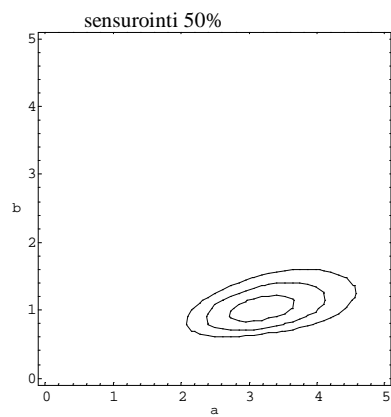
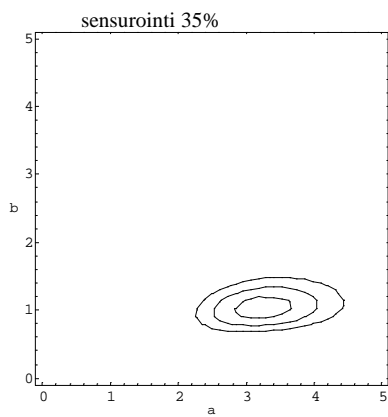
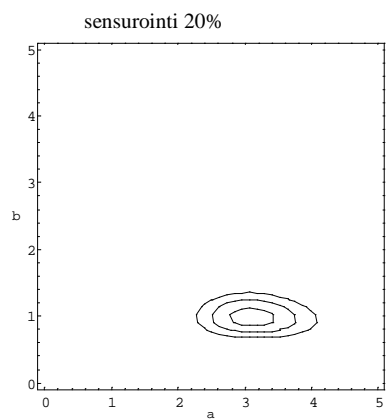
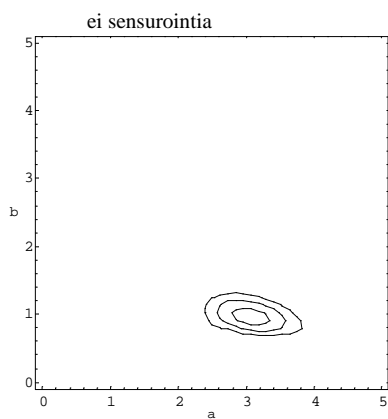
ODOTUSARVO $\hat{E}[x]$	0.837	0.875	0.90	0.816
VARIANSSI $\hat{D}^2[x]$	0.205	0.253	0.276	0.198

Aineisto 11 ($\alpha = 3, \beta = 1, E[x] = 0.893, D^2[x] = 0.105, n = 100$)

LUOTTAMUSJOUKOT



USKOTTAVUUSJOUKOT



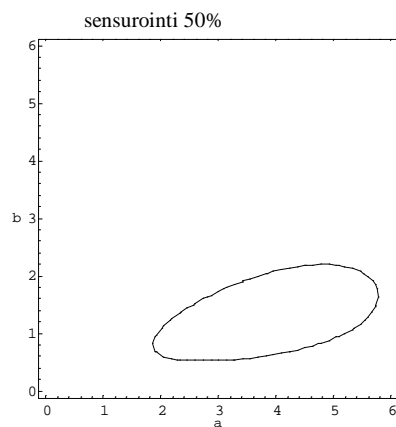
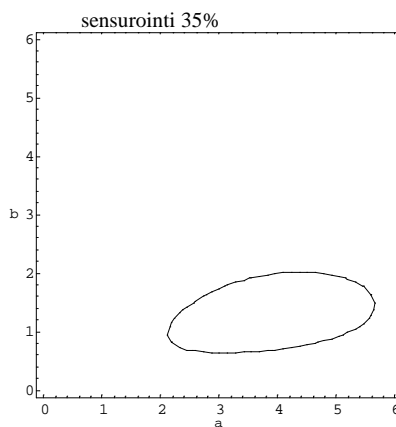
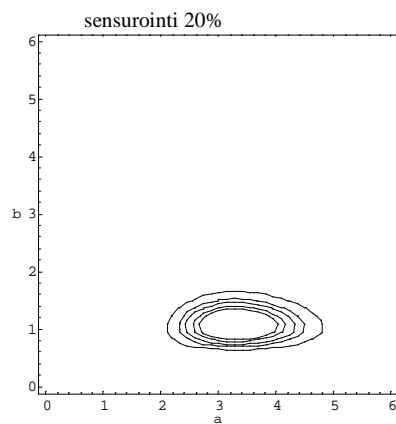
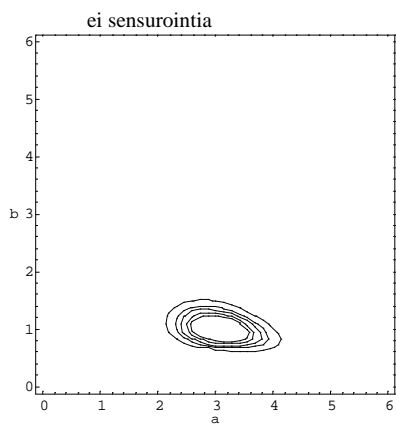
	EI SENSUROINTIA	SENSUROINTI 20%	SENSUROINTI 35%	SENSUROINTI 50%
$\hat{\alpha}$	3.06	3.10	3.23	3.16
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(2.48 , 3.71) 1.23	(2.39 , 3.93) 1.54	(2.39 , 4.24) 1.85	(2.21 , 4.33) 2.12
luottamustaso 95%	(2.61 , 3.55) 0.940	(2.55 , 3.72) 1.17	(2.58 , 3.98) 1.40	(2.42 , 4.03) 1.61
luottamustaso 90%	(2.68 , 3.47) 0.790	(2.64 , 3.62) 0.980	(2.68 , 3.86) 1.18	(2.53 , 3.88) 1.35
luottamustaso 80%	(2.76 , 3.38) 0.620	(2.74 , 3.50) 0.760	(2.80 , 3.71) 0.910	(2.66 , 3.72) 1.06
luottamustaso 70%	(2.82 , 3.31) 0.490	(2.80 , 3.42) 0.620	(2.88 , 3.62) 0.740	(2.75 , 3.61) 0.860
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(2.38 , 3.83) 1.45	(2.28 , 4.09) 1.81	(2.26 , 4.44) 2.18	(2.07 , 4.57) 2.50
uskottavuustaso 10%	(2.57 , 3.60) 1.03	(2.50 , 3.78) 1.28	(2.52 , 4.06) 1.54	(2.36 , 4.12) 1.76
uskottavuustaso 50%	(2.79 , 3.35) 0.560	(2.76 , 3.46) 0.70	(2.83 , 3.67) 0.840	(2.70 , 3.67) 0.970

$\hat{\beta}$	0.965	0.98	1.03	1.01
---------------	-------	------	------	------

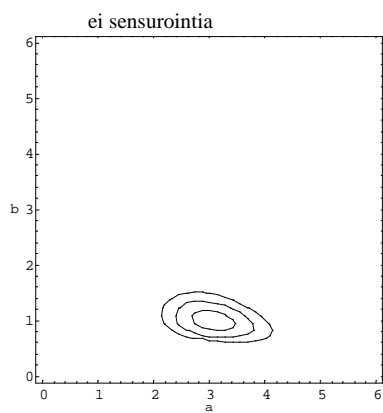
ODOTUSARVO $\hat{E}[x]$	0.926	0.913	0.87	0.886
VARIANSSI $\hat{D}^2[x]$	0.109	0.104	0.0874	0.0944

Aineisto 12 ($\alpha = 3, \beta = 1, E[x] = 0.893, D^2[x] = 0.105, n = 50$)

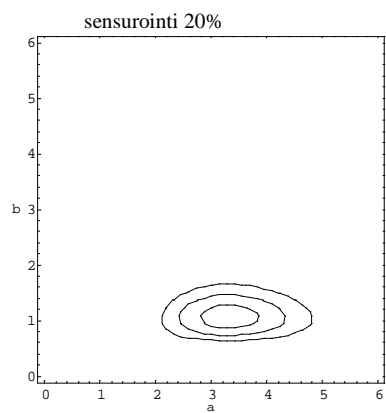
LUOTTAMUSJOUKOT



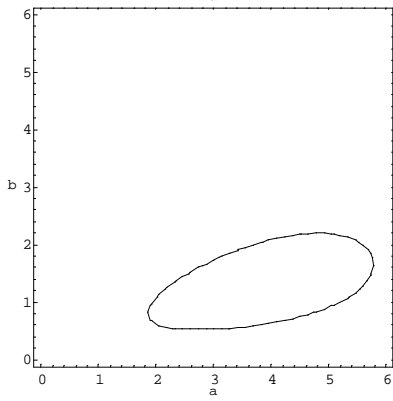
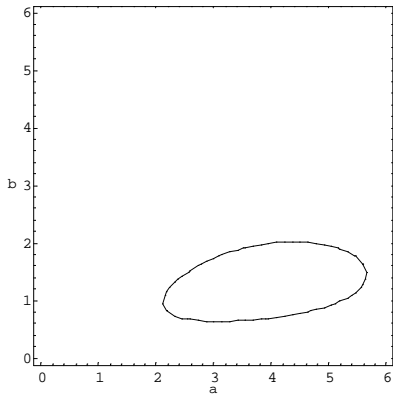
USKOTTAVUUSJOUKOT



sensurointi 35%



sensurointi 50%



	EI SENSUROINTIA	SENSUROINTI 20%	SENSUROINTI 35%	SENSUROINTI 50%
$\hat{\alpha}$	3.06	3.30	3.62	3.46
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(2.26 , 3.97) 1.71	(2.26 , 4.57) 2.31	(2.32 , 5.31) 2.99	(2.05 , 5.38) 3.33
luottamustaso 95%	(2.44 , 3.74) 1.30	(2.49 , 4.24) 1.75	(2.59 , 4.87) 2.28	(2.35 , 4.87) 2.52
luottamustaso 90%	(2.54 , 3.63) 1.09	(2.61 , 4.08) 1.47	(2.75 , 4.65) 1.90	(2.51 , 4.62) 2.11
luottamustaso 80%	(2.65 , 3.50) 0.85	(2.75 , 3.90) 1.15	(2.93 , 4.41) 1.48	(2.70 , 4.35) 1.65
luottamustaso 70%	(2.72 , 3.41) 0.690	(2.85 , 3.78) 0.930	(3.05 , 4.25) 1.20	(2.84 , 4.17) 1.33
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(2.13 , 4.14) 2.01	(2.10 , 4.82) 2.72	(2.12 , 5.65) 3.53	(1.85 , 5.77) 3.92
uskottavuustaso 10%	(2.39 , 3.81) 1.42	(2.42 , 4.34) 1.92	(2.51 , 5.00) 2.49	(2.25 , 5.02) 2.77
uskottavuustaso 50%	(2.68 , 3.46) 0.780	(2.80 , 3.85) 1.05	(2.98 , 4.34) 1.36	(2.76 , 4.27) 1.51

$\hat{\beta}$	0.991	1.06	1.18	1.11
---------------	-------	------	------	------

ODOTUSARVO $\hat{E}[x]$	0.902	0.845	0.761	0.811
VARIANSSI $\hat{D}^2[x]$	0.104	0.0796	0.0546	0.0671

5.1.2 Saatujen tulosten arviointia

Ensimmäinen havainto sensuroinnin vaikutusta koskevista aineistoista on ilmeinen: sensurointi kasvattaa luottamusjoukkojen kokoa ja luottamusvälien pituuksia. Voidaan siis tehdä johtopäätös, että sensurointi kadottaa informaatiota ja lisää näin ollen vikatiedoista tehtävien päätelmien tilastollista epävarmuutta. Tämänkaltaiseen karkeaan johtopäätökseen olisi voitu oikeastaan tulla pelkän intuitiivisen päättelynkin avulla: mitä epätäydellisempää vikatieta on, sitä hankalammaksi ja epävarmemmaksi käy siitä tehtävä tilastollinen päättely.

Tarkempi tarkastelu osoittaa, että luottamusjoukkojen (uskottavuusjoukkojen) koko ja muoto eivät riipu pelkästään sensuroinnin asteesta vaan myös taustalla olevasta jakaumasta, eli tässä tapauksessa Weibull-jakauman parametrien α - ja β -arvoista ja nimenomaan muotoparametrin α . α :n ollessa lähellä arvoa $\alpha=1$, luottamusjoukot (uskottavuusjoukot) pysyvät sensuroinnin asteesta riippumatta melko pyöreinä, eli sensurointi kasvattaa melko tasapuolisesti kummankin parametrin luottamusvälejä (uskottavuusvälejä). Mitä enemmän muotoparametrin arvo poikkeaa ykkösestä, sitä soikeammiksi käyvät luottamusjoukot (uskottavuusjoukot). Kun $\alpha < 1$ litistyvät luottamusjoukot (uskottavuusjoukot) siten, että asteikkoparametrin β luottamusvälit (uskottavuusvälit) ovat pidempiä. Ero kasvaa sitä suuremmaksi, mitä lähempänä muotoparametri on arvoa 0. Tämä voidaan havaita aineistoista 3, 4, 5 ja 6. Kun $\alpha > 1$ litistyvät luottamusjoukot (uskottavuusjoukot) päinvastaiseen suuntaan, eli α :n luottamusvälit (uskottavuusvälit) ovat pidempiä kuin β :n vastaavat ja ero kasvaa sitä suuremmaksi, mitä suurempi on parametrin α arvo. Aineistot 7, 8, 9, 10, 11 ja 12 kuvaavat näitä tilanteita.

Suurimman uskottavuuden estimaatteihin sensurointi ei juurikaan vaikuta. Parametrien estimaatit pysyvät sensuroinnista huolimatta melko lähellä "oikeita" arvojaan (jotka tunnetaan, koska otos on simuloitu). Myöskään mitään systemaattista muutosta estimaattien arvoissa ei ole havaittavissa, vaan sensuroinnin asteen kasvaessa parametrien estimaatit saavat arvoja sekä oikean arvon ylä- että alapuolelta. Luonnollisesti parametrien estimaattien vakaus näkyy myös estimoidun jakauman odotusarvossa ja varianssissa. Nämä pysyvät myös melko lähellä oikeita arvojaan sensuroinnista huolimatta.

Poikkeuksena tästä on otettava huomioon estimoidun varianssin käyttäytyminen silloin, kun muotoparametrin α arvo on lähellä nollaa. Mitä pienemmäksi α muuttuu, sitä epästabiilimpi on varianssi, ja jo pienet erot parametrin estimaateissa johtavat hyvin suuriin eroihin estimoidun varianssin arvoissa. Ilmiö on nähtävissä aineistoissa 3 ja 4 ja erityisesti aineistoissa 5 ja 6.

Selitys varianssin käyttäytymiselle löytyy, kun tarkastellaan Weibull-jakauman varianssin määritelmää (4.1.6), ja erityisesti gamma-funktiota. Varianssin määritelmästä johtuen tarkastellaan gamma-funktiota $\Gamma(y)$ vain arvoilla $y > 1$, (ja $\alpha \geq 0$).

Kun Gamma-funktion argumentti on positiivinen kokonaisluku eli $y \in N$, voidaan (4.1.7) kirjoittaa muodossa

$$(5.1.1) \quad \Gamma(y) = (y - 1)!, y \in N.$$

Tästä muodosta nähdään, että Gamma-funktio kasvaa hyvin nopeasti y :n kasvaessa, esim. $\Gamma(4) = 6$, $\Gamma(5) = 24$, $\Gamma(6) = 120$, $\Gamma(7) = 720$, $\Gamma(8) = 5040$, $\Gamma(9) = 40320$, jne. Näin ollen jo pienet erot funktion argumentissa johtavat suuriin eroihin itse funktion arvoissa.

Kun muotoparametri α pienenee, niin sekä $\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)$ että

$\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^2$ kasvavat, mutta ensin mainittu vielä huomattavasti nopeammin. Tästä johtuu Weibull-jakauman varianssin käyttäytyminen muotoparametrin pienillä arvoilla (ks. Varianssin määritelmä, kaava (4.1.6)). Varianssin käyttäytymisestä johtuen sitä ei voida pitää Weibull-jakauman hyvänä mittana silloin, kun $\alpha < 1$.

Vertailtaessa keskenään luottamus- ja uskottavuusjoukkoja havaitaan selvästi, että ne käyttäytyvät samalla tavalla sensuroinnin vaikutuksen alaisina. Kappaleessa 3.5.1 todettiin, että suurissa otoksissa $100(\tau) \%$:n uskottavuusjoukko vastaa likimäärin $100(1 - \tau) \%$:n luottamusjoukkoa. Tämä on nähtävissä selvästi kaikissa aineistoissa. Uskottavuusjoukkoja esittävien kuvien uloin kehä rajaa 1% :n uskottavuusjoukon ja luottamusjoukkojen uloin kehä 99% :n luottamusjoukon. Näiden tulisi rajata likimäärin samat parametriavaruuden joukot ja kuvista nähdään, että näin todellakin on.

Tiivistettynä voisi sanoa, että sensurointi ei juurikaan vaikuta Weibull-jakauman parametrien suurimman uskottavuuden estimaatteihin, eikä tätä kautta estimoidun jakauman odotusarvoon ja varianssiin. Sen sijaan parametrien luottamus- ja uskottavuusvälit kasvavat sensuroinnin asteen kasvaessa ja vika-aineistosta tehtävän päättelyn tilastollinen epävarmuus kasvaa.

5.2 Weibull-prosessin parametrien luottamus- ja uskottavuusjoukot

Sensuroinnin vaikutuksen tarkastelu on Weibull-prosessin osalta suoritettu seuraavasti:

Tarkkailuajan vaikutus

1. On simuloitu yksi aineisto Weibull-prosessista halutuun parametreihin α ja β haluttuun aikaan t_0 saakka. (Koe on suunniteltu siten, että hetkeen t_0 mennessä on ehtinyt sattua noin 100 vikaantumista.) Tämän jälkeen alkuperäistä havainnointiaikaa t_0 on lyhennetty aikoihin $0.8 \cdot t_0$, $0.65 \cdot t_0$ ja $0.5 \cdot t_0$ ja kohdat 2 - 6 on suoritettu kaikille neljälle aineistolle.
2. Parametreille α ja β on laskettu suurimman uskottavuuden estimaatit kaavojen (4.3.6) ja (4.3.7) mukaisesti.
3. Parametrien α ja β luottamusjoukot on piirretty kappaleen 4.3.1 antaman menetelmän mukaisesti luottamustasoilla 99 %, 95 %, 90 %, 80 % ja 70 %.
4. Parametrien α ja β elliptiset uskottavuusjoukot on piirretty kaavan (4.3.9) mukaisesti uskottavuustasoin 1 %, 10 % ja 50 %.
5. Parametrille α (muotoparametri) on laskettu luottamusvälit kaavan (4.3.17) mukaisesti luottamustasoilla 99 %, 95 %, 90 %, 80 % ja 70 %.

6. Parametrille α (muotoparametri) on laskettu uskottavuusvälit kaavan (4.3.11) mukaisesti uskottavuustasoilla 1 %, 10 % ja 50 %.

Kunnossapidon vaikutus

1. On simuloitu yksi aineisto Weibull-prosessista halutuun parametrein α ja β haluttuun aikaan t_0 saakka. (Koe on suunniteltu siten, että hetkeen t_0 mennessä on ehtinyt sattua noin 100 vikaantumista.) Tämän jälkeen alkuperäinen havainnointiaika t_0 on jaettu kahteen, kolmeen ja neljään kunnossapitajaksoon ja kohdat 2 - 6 on suoritettu kaikille neljälle aineistolle (kullekin kunnossapitajaksolle on siis simuloitu oma prosessi). (Huom. kunnossapitoon liittyvät oletukset, ks. kappale 4.3.3.)
2. Parametreille α ja β on laskettu suurimman uskottavuuden estimaatit kaavojen (4.3.30) ja (4.3.31) mukaisesti
3. Parametrien α ja β luottamusjoukot on piirretty kappaleen 4.3.2 antaman menetelmän mukaisesti luottamustasoilla 99 %, 95 %, 90 %, 80 % ja 70 %.
4. Parametrien α ja β elliptiset uskottavuusjoukot on piirretty kaavan (4.3.8) mukaisesti uskottavuustasoin 1 %, 10 % ja 50 %.
5. Parametrille α (muotoparametri) on laskettu luottamusvälit kaavan (4.3.37) mukaisesti luottamustasoilla 99 %, 95 %, 90 %, 80 % ja 70 %.
6. Parametrille α (muotoparametri) on laskettu uskottavuusvälit kaavan (4.3.11) mukaisesti uskottavuustasoilla 1 %, 10 % ja 50 %.

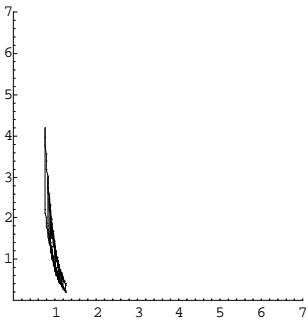
5.2.1 Simuloidut aineistot

TARKKAILUAJAN VAIKUTUS

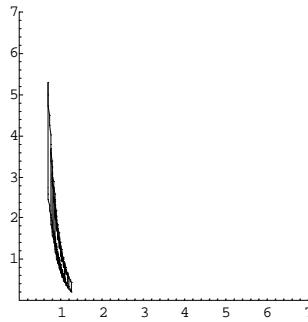
Aineisto 1 ($\alpha = 1, \beta = 1, t_0 = 100$)

LUOTTAMUSJOUKOT

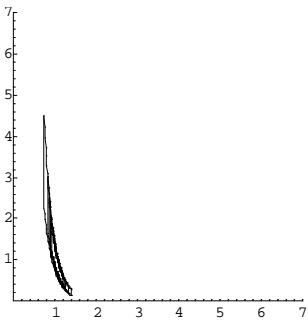
koko aika



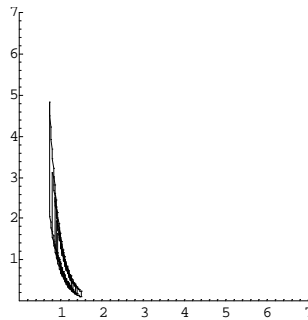
0.8 * koko aika



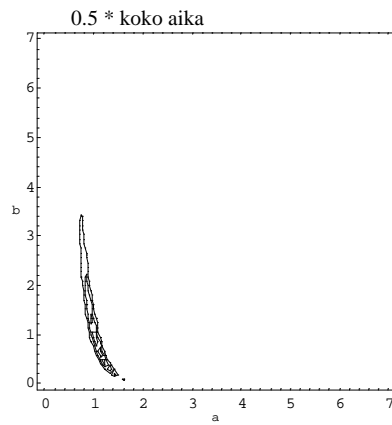
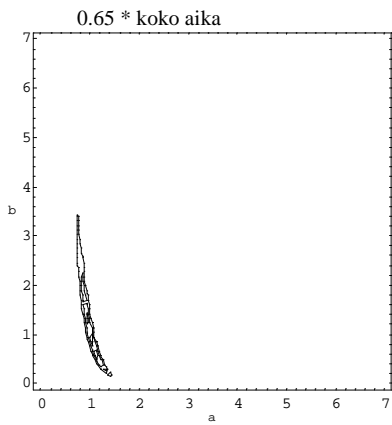
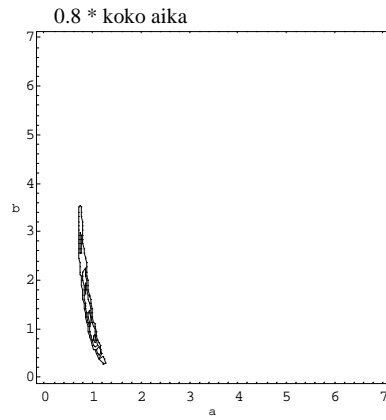
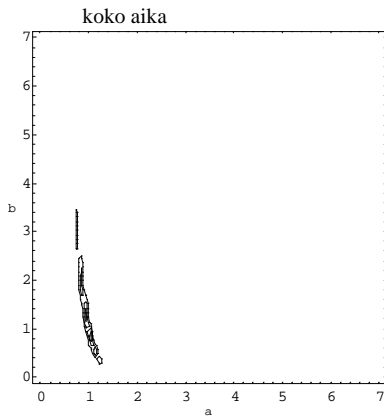
0.65 * koko aika



0.5 * koko aika



USKOTTAVUUSJOUKOT



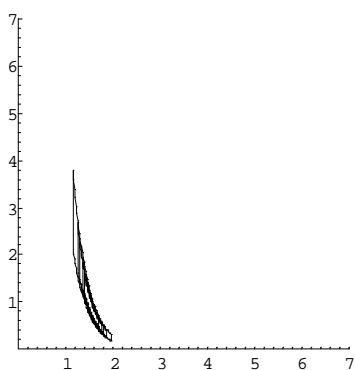
	KOKO AIKA	0.8 * AIKA	0.65 * AIKA	0.5 * AIKA
$\hat{\alpha}$	1.01	0.964	1.06	1.10
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso	(0.773 , 1.24)	(0.707 , 1.22)	(0.762 , 1.36)	(0.746 , 1.45)
99%	0.467	0.513	0.598	0.704
luottamustaso	(0.842 , 1.18)	(0.782 , 1.15)	(0.85 , 1.27)	(0.848 , 1.34)
95%	0.338	0.368	0.420	0.492
luottamustaso	(0.878 , 1.14)	(0.823 , 1.11)	(0.897 , 1.23)	(0.903 , 1.29)
90%	0.262	0.287	0.333	0.387
luottamustaso	(0.923 , 1.09)	(0.871 , 1.06)	(0.954 , 1.17)	(0.969 , 1.22)
80%	0.167	0.189	0.216	0.251
luottamustaso	(0.955 , 1.06)	(0.906 , 1.02)	(0.995 , 1.13)	(1.02 , 1.18)
70%	0.105	0.114	0.135	0.160
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso	(0.731 , 1.35)	(0.666 , 1.34)	(0.718 , 1.50)	(0.70 , 1.62)
1%	0.619	0.674	0.782	0.920
uskottavuustaso	(0.806 , 1.24)	(0.746 , 1.22)	(0.809 , 1.36)	(0.804 , 1.45)
10%	0.434	0.474	0.551	0.646
uskottavuustaso	(0.894 , 1.13)	(0.84 , 1.10)	(0.918 , 1.22)	(0.928 , 1.28)
50%	0.236	0.260	0.302	0.352

$\hat{\beta}$	0.953	1.11	0.807	0.728
---------------	-------	------	-------	-------

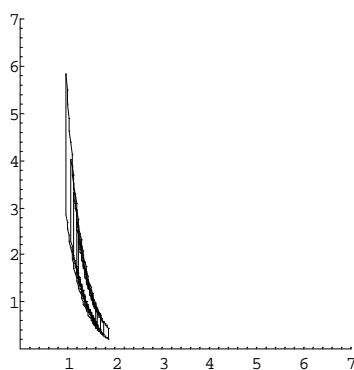
Aineisto 2 ($\alpha = 1,5$, $\beta = 1$, $t_0 = 21.85$)

LUOTTAMUSJOUKOT

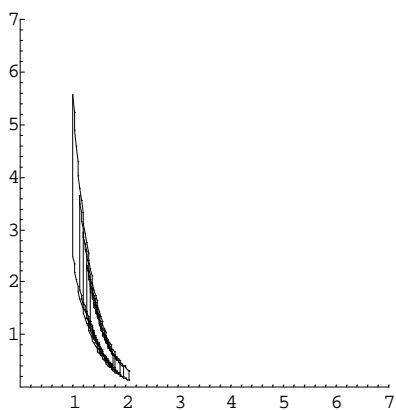
koko aika



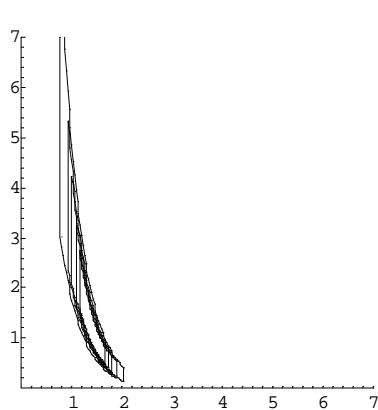
0.8 * koko aika



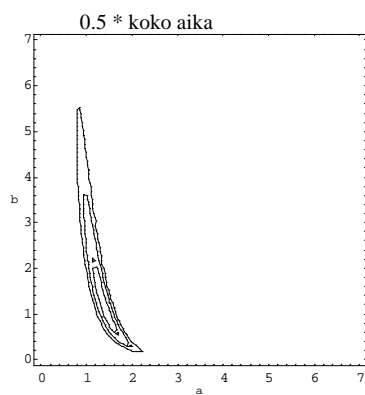
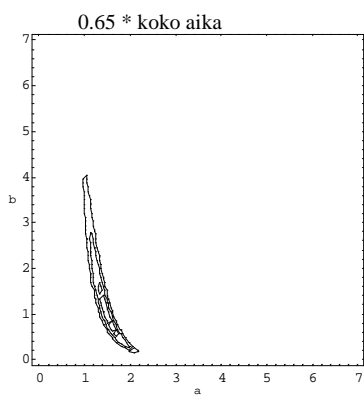
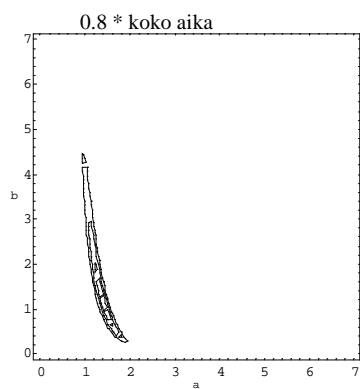
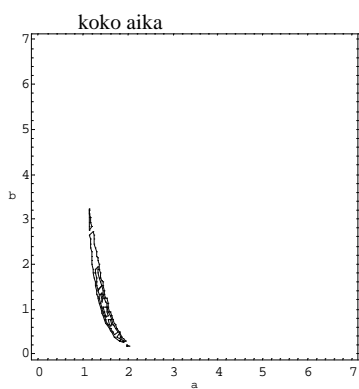
0.65 * koko aika



0.5 * koko aika



USKOTTAVUUSJOUKOT



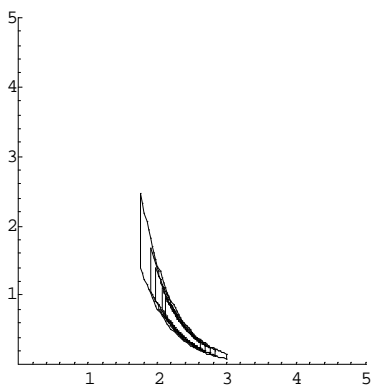
	KOKO AIKA	0.8 * AIKA	0.65 * AIKA	0.5 * AIKA
$\hat{\alpha}$	1.55	1.41	1.53	1.40
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso	(1.19 , 1.91)	(1.00 , 1.82)	(1.04 , 2.02)	(0.835 , 1.97)
99%	0.720	0.820	0.980	1.14
luottamustaso	(1.29 , 1.81)	(1.12 , 1.70)	(1.18 , 1.88)	(1.00 , 1.81)
95%	0.520	0.580	0.700	0.810
luottamustaso	(1.35 , 1.75)	(1.19 , 1.64)	(1.26 , 1.80)	(1.09 , 1.72)
90%	0.400	0.450	0.540	0.630
luottamustaso	(1.42 , 1.68)	(1.26 , 1.56)	(1.35 , 1.71)	(1.20 , 1.61)
80%	0.260	0.300	0.360	0.410
luottamustaso	(1.47 , 1.63)	(1.32 , 1.50)	(1.42 , 1.64)	(1.27 , 1.53)
70%	0.160	0.180	0.220	0.260
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso	(1.12 , 2.07)	(0.945 , 2.01)	(0.974 , 2.27)	(0.786 , 2.28)
1%	0.950	1.07	1.30	1.49
uskottavuustaso	(1.24 , 1.91)	(1.07 , 1.82)	(1.12 , 2.03)	(0.942 , 1.99)
10%	0.670	0.750	0.910	1.05
uskottavuustaso	(1.37 , 1.74)	(1.22 , 1.63)	(1.29 , 1.79)	(1.13 , 1.71)
50%	0.370	0.410	0.500	0.580

$\hat{\beta}$	0.833	1.14	0.895	1.15
---------------	-------	------	-------	------

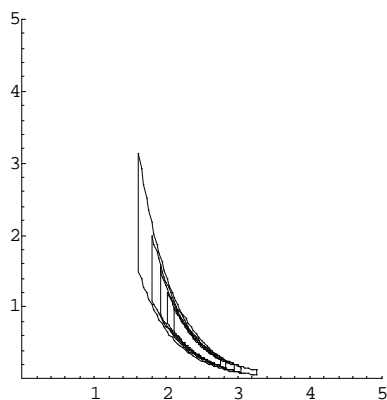
Aineisto 3 ($\alpha = 2, \beta = 1, t_0 = 9.5$)

LUOTTAMUSJOUKOT

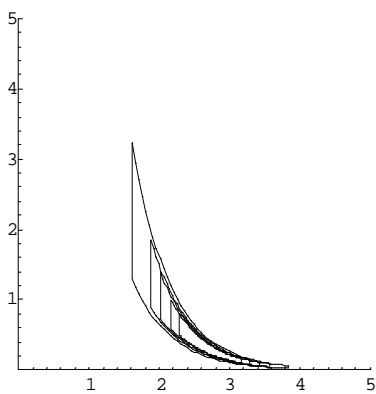
koko aika



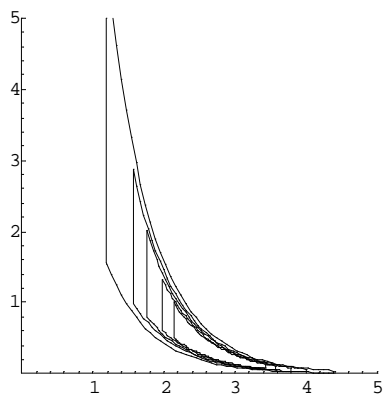
0.8 * koko aika



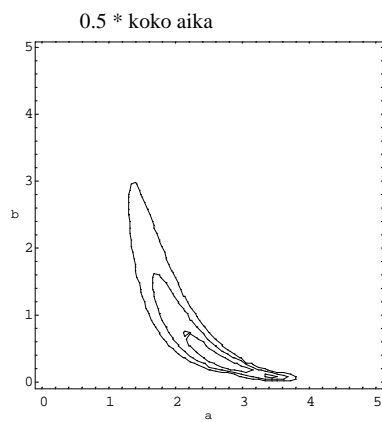
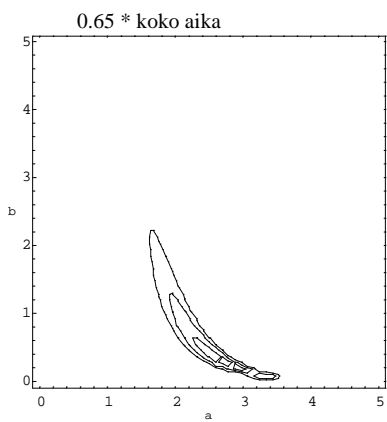
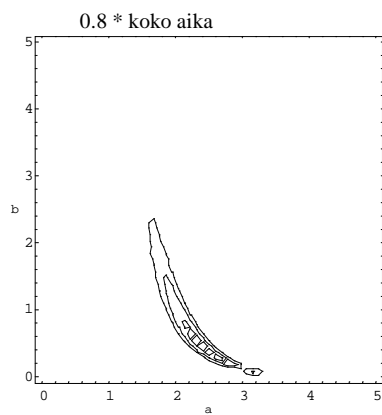
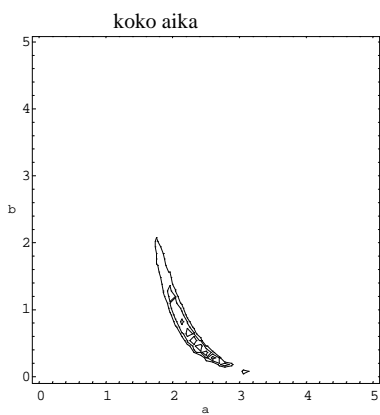
0.65 * koko aika



0.5 * koko aika



USKOTTAVUUSJOUKOT



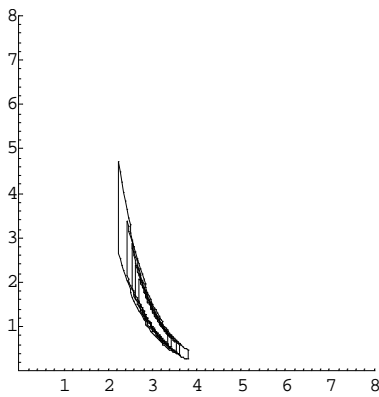
	KOKO AIKA	0.8 * AIKA	0.65 * AIKA	0.5 * AIKA
$\hat{\alpha}$	2.38	2.44	2.73	2.78
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso	(1.82 , 2.93)	(1.70 , 3.17)	(1.72 , 3.73)	(1.33 , 4.22)
99%	1.11	1.47	2.01	2.89
luottamustaso	(1.98 , 2.77)	(1.92 , 2.96)	(2.02 , 3.44)	(1.76 , 3.80)
95%	0.790	1.04	1.42	2.04
luottamustaso	(2.07 , 2.68)	(2.03 , 2.84)	(2.17 , 3.28)	(1.98 , 3.57)
90%	0.610	0.810	1.11	1.59
luottamustaso	(2.18 , 2.58)	(2.17 , 2.70)	(2.36 , 3.09)	(2.26 , 3.30)
80%	0.400	0.530	0.730	1.04
luottamustaso	(2.25 , 2.50)	(2.27 , 2.60)	(2.50 , 2.95)	(2.45 , 3.10)
70%	0.250	0.33	0.450	0.650
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso	(1.72 , 3.18)	(1.60 , 3.53)	(1.62 , 4.25)	(1.29 , 5.11)
1%	1.46	1.93	2.63	3.82
uskottavuustaso	(1.90 , 2.93)	(1.82 , 3.18)	(1.90 , 3.76)	(1.65 , 4.33)
10%	1.03	1.36	1.86	2.68
uskottavuustaso	(2.11 , 2.67)	(2.08 , 2.83)	(2.25 , 3.27)	(2.11 , 3.57)
50%	0.560	0.750	1.02	1.46

$\hat{\beta}$	0.47	0.421	0.28	0.264
---------------	------	-------	------	-------

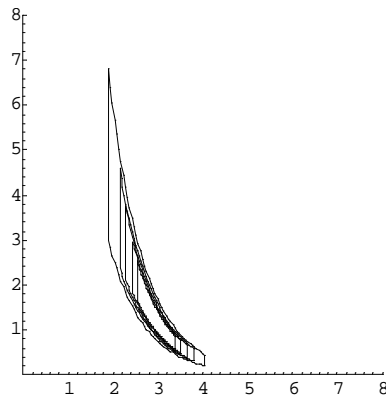
Aineisto 4 ($\alpha = 3, \beta = 1, t_0 = 4.4$)

LUOTTAMUSJOUKOT

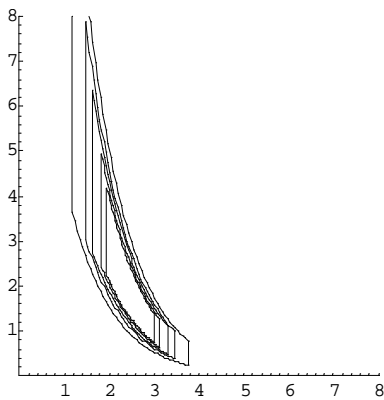
koko aika



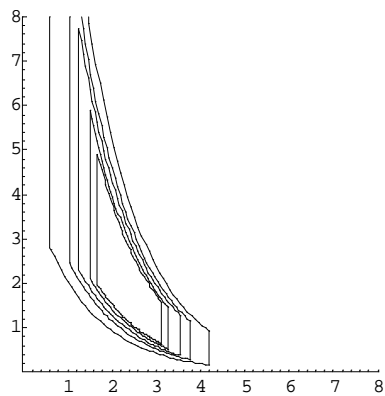
0.8 * koko aika



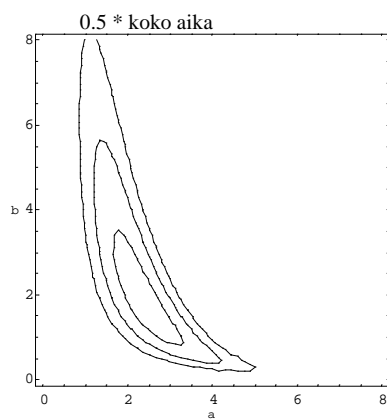
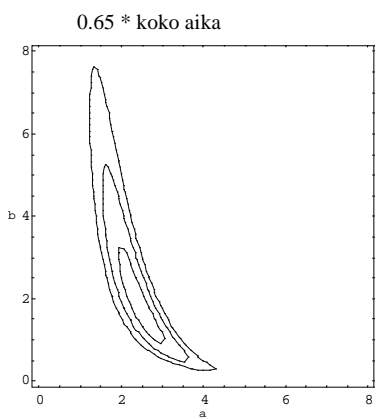
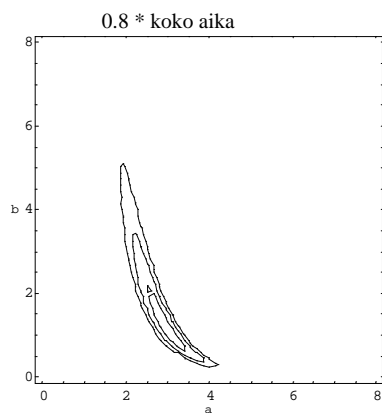
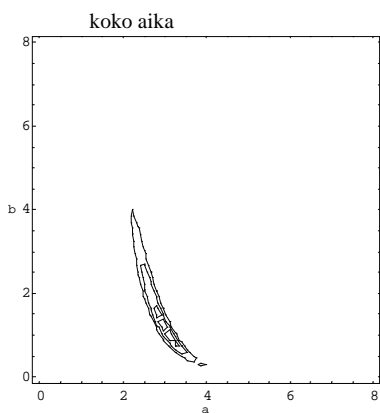
0.65 * koko aika



0.5 * koko aika



USKOTTAVUUSJOUKOT



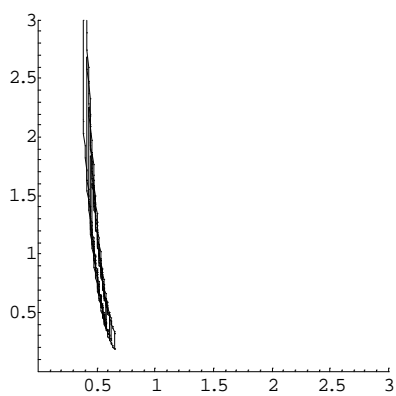
	KOKO AIKA	0.8 * AIKA	0.65 * AIKA	0.5 * AIKA
$\hat{\alpha}$	3.03	2.97	2.47	2.4
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso	(2.32 , 3.73)	(1.99 , 3.95)	(1.30 , 3.65)	(0.789 , 4.02)
99%	1.41	1.96	2.35	3.23
luottamustaso	(2.53 , 3.53)	(2.28 , 3.66)	(1.64 , 3.30)	(1.26 , 3.54)
95%	1.00	1.38	1.66	2.28
luottamustaso	(2.64 , 3.42)	(2.43 , 3.51)	(1.83 , 3.12)	(1.51 , 3.29)
90%	0.780	1.08	1.29	1.78
luottamustaso	(2.77 , 3.28)	(2.62 , 3.32)	(2.05 , 2.90)	(1.82 , 2.99)
80%	0.510	0.700	0.850	1.17
luottamustaso	(2.87 , 3.19)	(2.75 , 3.19)	(2.21 , 2.74)	(2.04 , 2.77)
70%	0.320	0.440	0.530	0.730
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso	(2.20 , 4.04)	(1.87 , 4.44)	(1.24 , 4.33)	(0.862 , 5.16)
1%	1.84	2.57	3.09	4.30
uskottavuustaso	(2.42 , 3.73)	(2.16 , 3.97)	(1.54 , 3.72)	(1.20 , 4.21)
10%	1.31	1.81	2.18	3.01
uskottavuustaso	(2.69 , 3.40)	(2.50 , 3.49)	(1.92 , 3.11)	(1.68 , 3.31)
50%	0.710	0.990	1.19	1.63

$\hat{\beta}$	1.13	1.19	1.79	1.8
---------------	------	------	------	-----

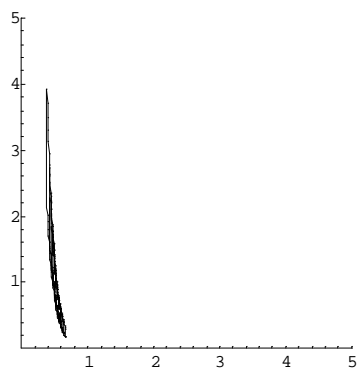
Aineisto 5 ($\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $t_0 = 9800$)

LUOTTAMUSJOUKOT

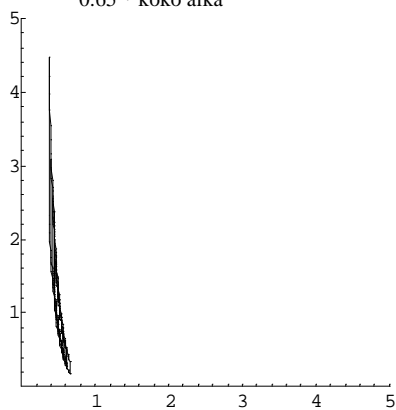
koko aika



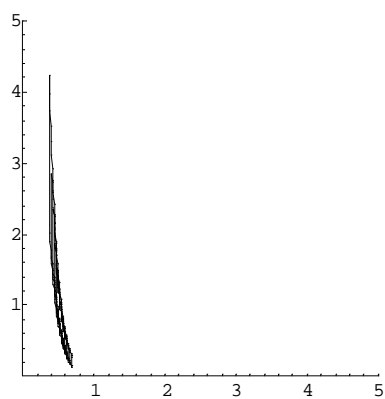
0.8 * koko aika



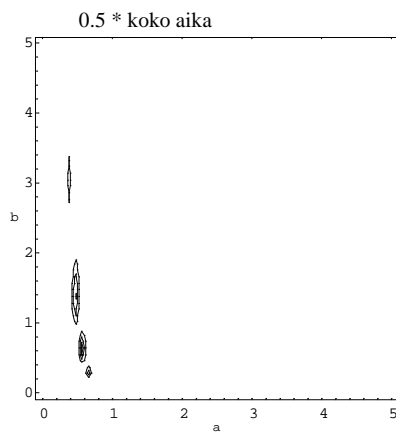
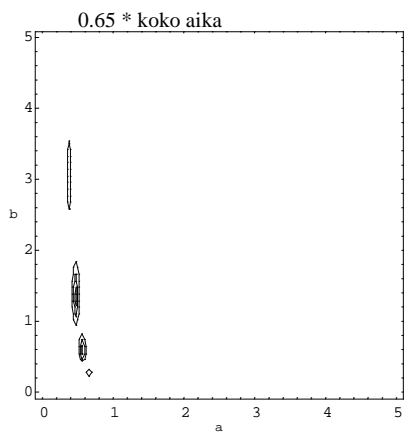
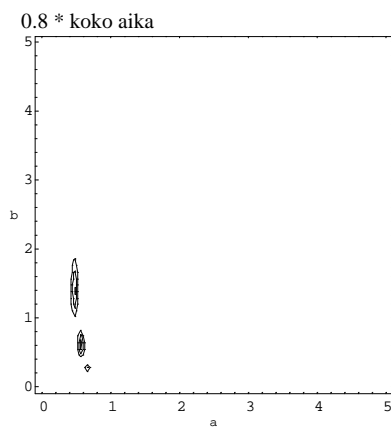
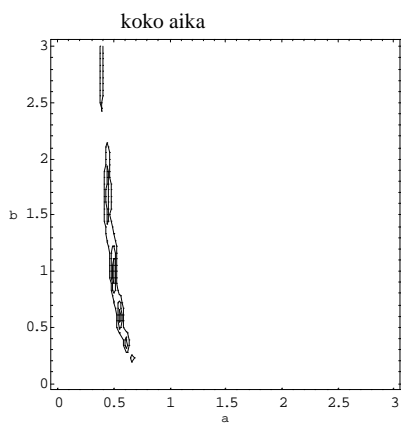
0.65 * koko aika



0.5 * koko aika



USKOTTAVUUSJOUKOT



	KOKO AIKA	0.8 * AIKA	0.65 * AIKA	0.5 * AIKA
$\hat{\alpha}$	0.519	0.523	0.511	0.533
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(0.397 , 0.64) 0.243	(0.394 , 0.652) 0.258	(0.376 , 0.645) 0.269	(0.386 , 0.680) 0.294
luottamustaso 95%	(0.433 , 0.605) 0.172	(0.432 , 0.615) 0.183	(0.415 , 0.606) 0.191	(0.429 , 0.637) 0.208
luottamustaso 90%	(0.452 , 0.586) 0.134	(0.452 , 0.594) 0.142	(0.436 , 0.585) 0.149	(0.452 , 0.614) 0.162
luottamustaso 80%	(0.475 , 0.563) 0.088	(0.477 , 0.57) 0.093	(0.462 , 0.559) 0.097	(0.480 , 0.586) 0.106
luottamustaso 70%	(0.491 , 0.546) 0.055	(0.494 , 0.552) 0.058	(0.48 , 0.541) 0.061	(0.500 , 0.566) 0.066
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(0.376 , 0.693) 0.317	(0.373 , 0.71) 0.337	(0.355 , 0.707) 0.352	(0.363 , 0.749) 0.386
uskottavuustaso 10%	(0.415 , 0.639) 0.224	(0.413 , 0.652) 0.239	(0.396 , 0.645) 0.249	(0.409 , 0.681) 0.272
uskottavuustaso 50%	(0.46 , 0.583) 0.123	(0.461 , 0.591) 0.130	(0.445 , 0.582) 0.137	(0.462 , 0.611) 0.149

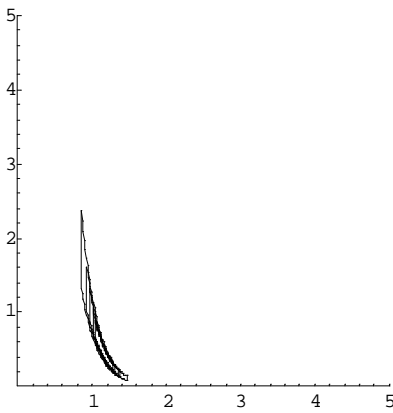
$\hat{\beta}$	0.842	0.815	0.891	0.766
---------------	-------	-------	-------	-------

KUNNOSSAPIDON VAIKUTUS

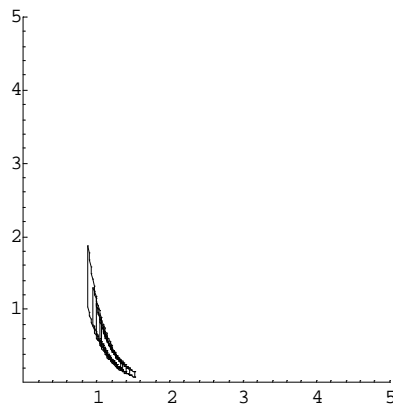
Aineisto 1 ($\alpha = 1, \beta = 1, t_0 = 106$)

LUOTTAMUSJOUKOT

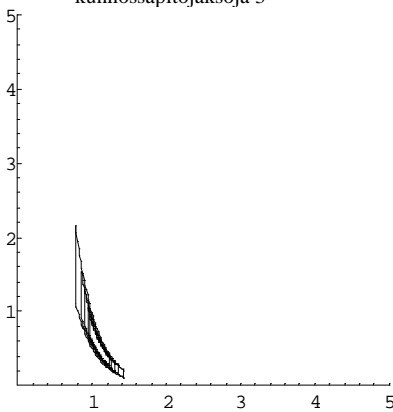
ei kunnossapitoa



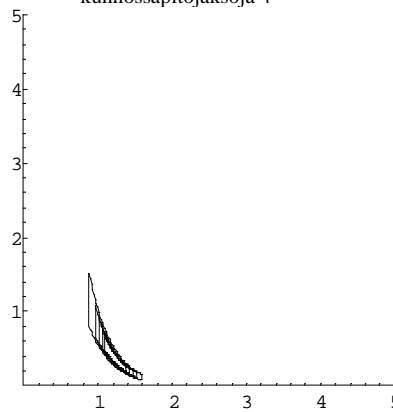
kunnossapitojaksoja 2



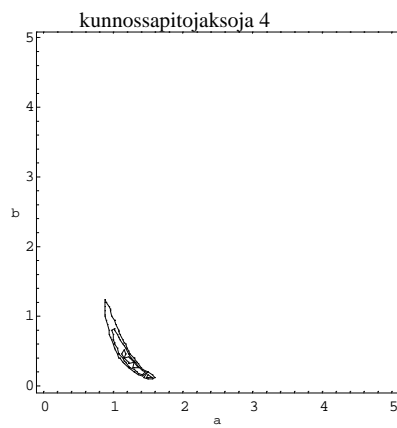
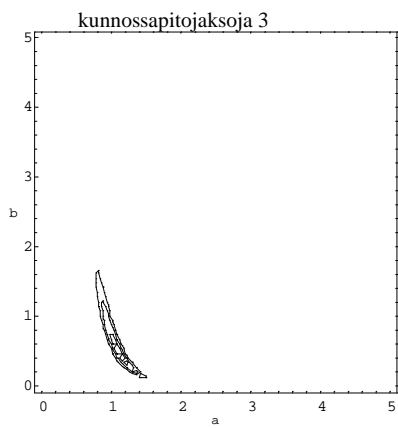
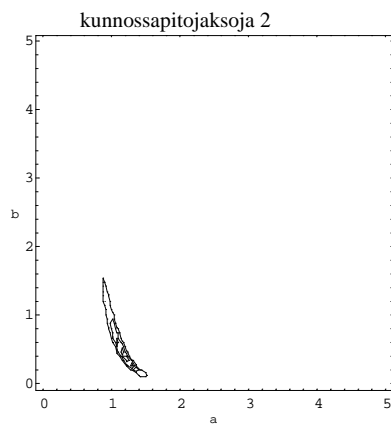
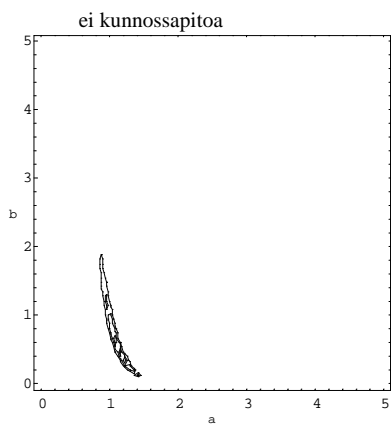
kunnossapitojaksoja 3



kunnossapitojaksoja 4



USKOTTAVUUSJOUKOT



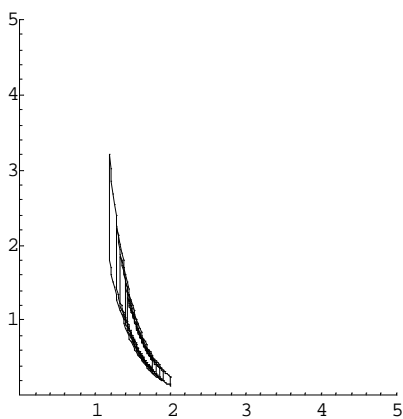
	EI KUPIA	KUPIJAKSOJA 2	KUPIJAKSOJA 3	KUPIJAKSOJA 4
$\hat{\alpha}$	1.16	1.20	1.10	1.24
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(0.887 , 1.43) 0.543	(0.905 , 1.49) 0.585	(0.807 , 1.40) 0.593	(0.916 , 1.56) 0.644
luottamustaso 95%	(0.967 , 1.35) 0.383	(0.991 , 1.41) 0.419	(0.893 , 1.31) 0.417	(1.01 , 1.47) 0.460
luottamustaso 90%	(1.01 , 1.31) 0.300	(1.04 , 1.36) 0.320	(0.94 , 1.27) 0.330	(1.06 , 1.42) 0.360
luottamustaso 80%	(1.06 , 1.26) 0.200	(1.09 , 1.31) 0.220	(0.996 , 1.21) 0.214	(1.12 , 1.36) 0.240
luottamustaso 70%	(1.10 , 1.22) 0.120	(1.13 , 1.27) 0.14	(1.04 , 1.17) 0.130	(1.17 , 1.31) 0.140
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(0.839 , 1.55) 0.711	(0.855 , 1.62) 0.765	(0.760 , 1.54) 0.780	(0.864 , 1.71) 0.846
uskottavuustaso 10%	(0.926 , 1.43) 0.504	(0.948 , 1.49) 0.542	(0.852 , 1.40) 0.548	(0.965 , 1.56) 0.595
uskottavuustaso 50%	(1.03 , 1.30) 0.270	(1.06 , 1.35) 0.290	(0.96 , 1.26) 0.30	(1.18 , 1.41) 0.230

$\hat{\beta}$	0.44	0.385	0.49	0.345
---------------	------	-------	------	-------

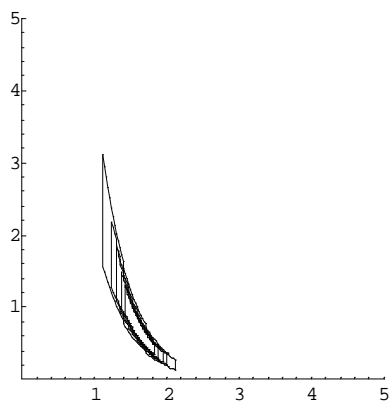
Aineisto 2 ($\alpha = 1.5$, $\beta = 1$, $t_0 = 23$)

LUOTTAMUSJOUKOT

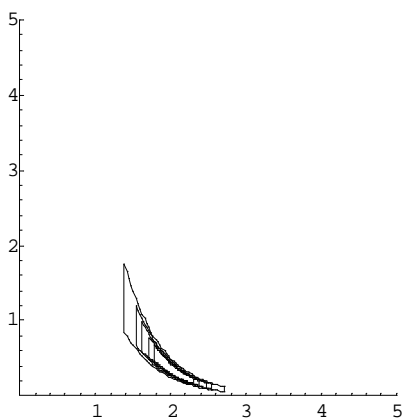
ei kunnossapitoa



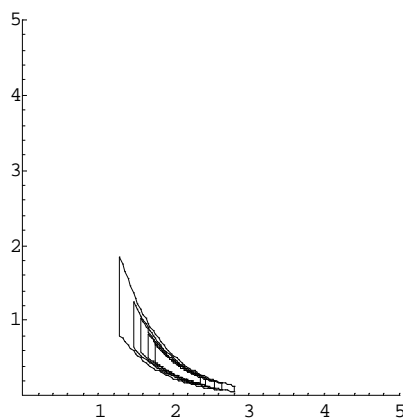
kunnossapitojaksoja 2



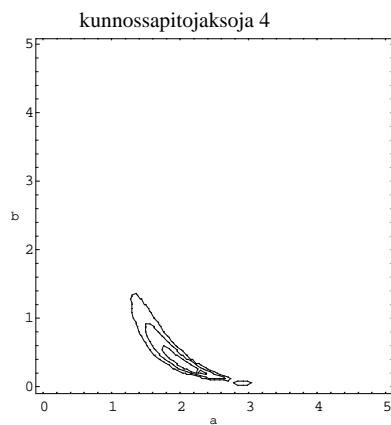
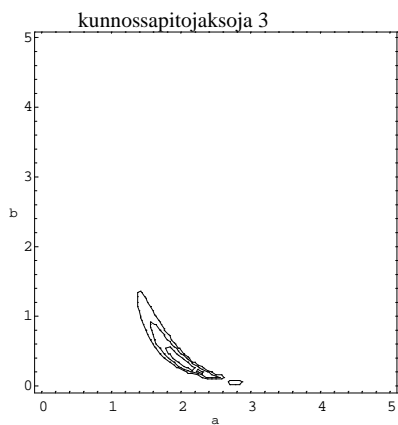
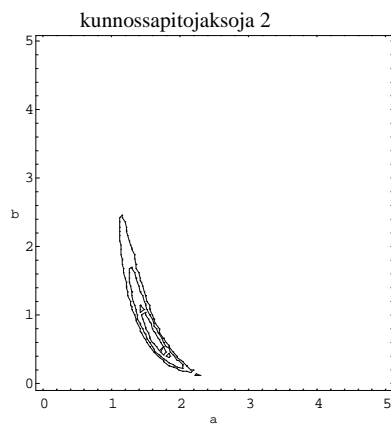
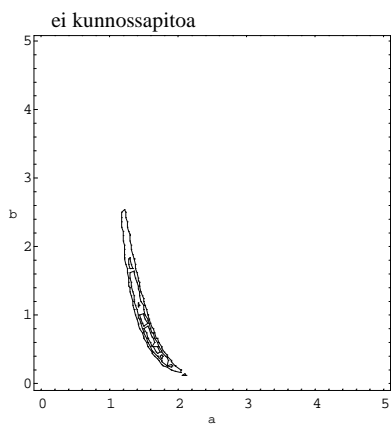
kunnossapitojaksoja 3



kunnossapitojaksoja 4



USKOTTAVUUSJOUKOT



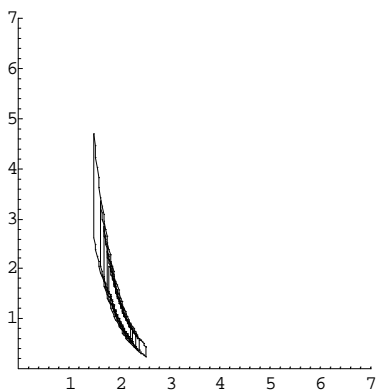
	EI KUPIA	KUPIJAKSOJA 2	KUPIJAKSOJA 3	KUPIJAKSOJA 4
$\hat{\alpha}$	1.60	1.62	2.05	2.05
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(1.22 , 1.97) 0.750	(1.17 , 2.07) 0.900	(1.45 , 2.65) 1.20	(1.36 , 2.74) 1.38
luottamustaso 95%	(1.33 , 1.86) 0.530	(1.30 , 1.94) 0.640	(1.63 , 2.48) 0.85	(1.57 , 2.54) 0.970
luottamustaso 90%	(1.39 , 1.80) 0.410	(1.37 , 1.87) 0.500	(1.72 , 2.38) 0.660	(1.67 , 2.44) 0.770
luottamustaso 80%	(1.46 , 1.73) 0.27	(1.46 , 1.79) 0.330	(1.83 , 2.27) 0.440	(1.81 , 2.30) 0.490
luottamustaso 70%	(1.51 , 1.68) 0.170	(1.52 , 1.72) 0.200	(1.92 , 2.19) 0.270	(1.90 , 2.21) 0.310
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(1.16 , 2.13) 0.970	(1.1 , 2.29) 1.19	(1.36 , 2.94) 1.58	(1.28 , 3.09) 1.81
uskottavuustaso 10%	(1.28 , 1.97) 0.690	(1.24 , 2.08) 0.840	(1.55 , 2.66) 1.11	(1.48 , 2.76) 1.28
uskottavuustaso 50%	(1.41 , 1.79) 0.380	(1.41 , 1.86) 0.450	(1.76 , 2.37) 0.610	(1.73 , 2.42) 0.690

$\hat{\beta}$	0.665	0.664	0.322	0.33
---------------	-------	-------	-------	------

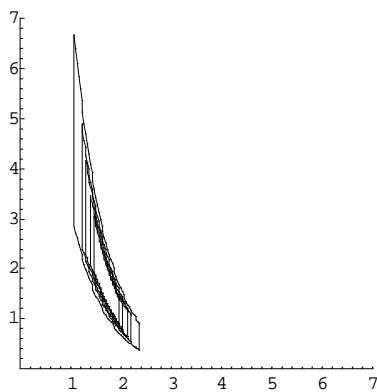
Aineisto 3 ($\alpha = 2, \beta = 1, t_0 = 9.3$)

LUOTTAMUSJOUKOT

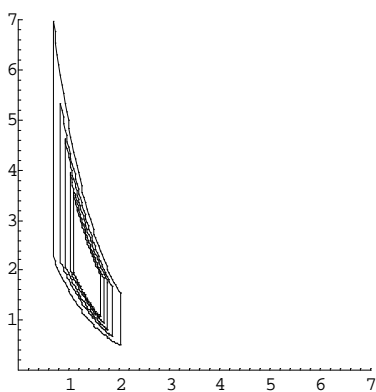
ei kunnossapitoa



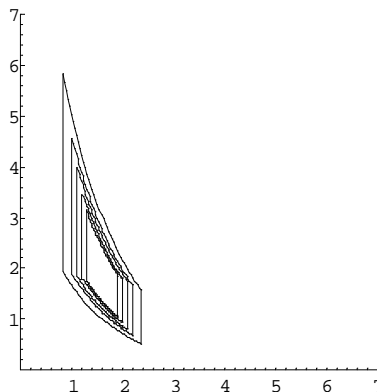
kunnossapitojaksoja 2



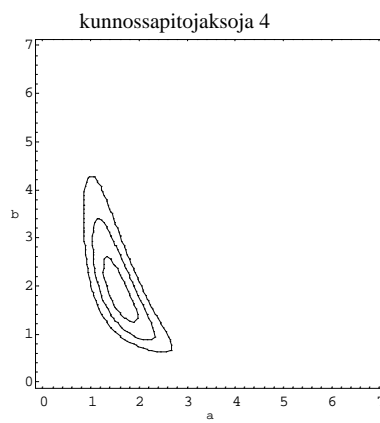
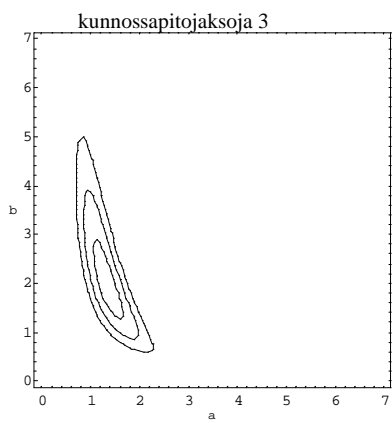
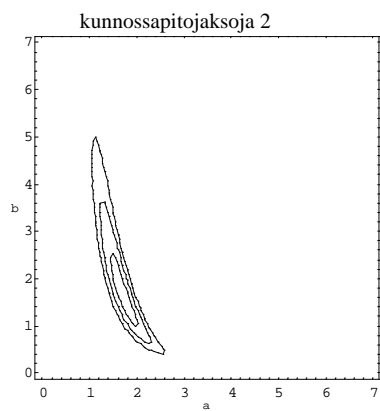
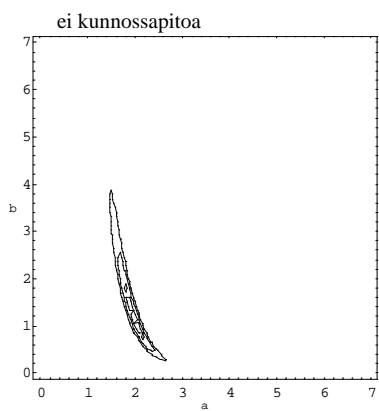
kunnossapitojaksoja 3



kunnossapitojaksoja 4



USKOTTAVUUSJOUKOT



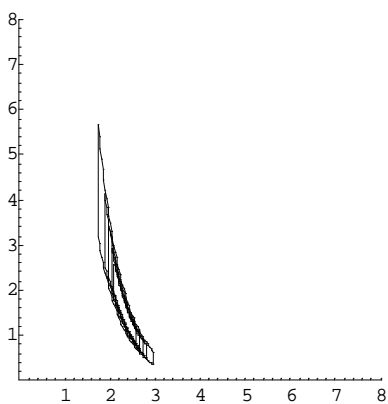
	EI KUPIA	KUPIAKSOJA 2	KUPIAKSOJA 3	KUPIAKSOJA 4
$\hat{\alpha}$	2.01	1.72	1.35	1.59
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(1.54 , 2.48) 0.940	(1.13 , 2.3) 1.17	(0.743 , 1.95) 1.21	(0.893 , 2.29) 1.40
luottamustaso 95%	(1.68 , 2.35) 0.670	(1.30 , 2.13) 0.830	(0.92 , 1.77) 0.85	(1.10 , 2.09) 0.99
luottamustaso 90%	(1.75 , 2.27) 0.520	(1.39 , 2.04) 0.650	(1.01 , 1.68) 0.670	(1.21 , 1.98) 0.770
luottamustaso 80%	(1.84 , 2.18) 0.340	(1.50 , 1.93) 0.430	(1.13 , 1.56) 0.430	(1.34 , 1.85) 0.510
luottamustaso 70%	(1.91 , 2.12) 0.210	(1.58 , 1.85) 0.270	(1.21 , 1.48) 0.270	(1.44 , 1.75) 0.310
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(1.46 , 2.69) 1.23	(1.06 , 2.6) 1.54	(0.705 , 2.29) 1.59	(0.846 , 2.69) 1.84
uskottavuustaso 10%	(1.61 , 2.48) 0.870	(1.23 , 2.32) 1.09	(0.864 , 1.98) 1.12	(1.3 , 2.33) 1.03
uskottavuustaso 50%	(1.78 , 2.26) 0.480	(1.43 , 2.03) 0.60	(1.06 , 1.67) 0.610	(1.27 , 1.98) 0.71

$\hat{\beta}$	1.11	1.65	1.96	1.82
---------------	------	------	------	------

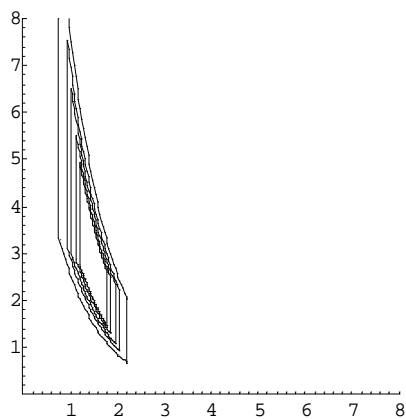
Aineisto 4 ($\alpha = 2.5$, $\beta = 1$, $t_0 = 6.0$)

LUOTTAMUSJOUKOT

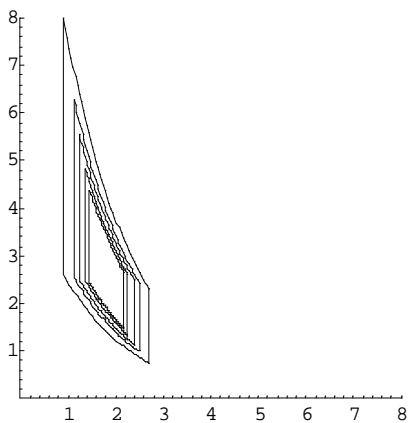
ei kunnossapittoa



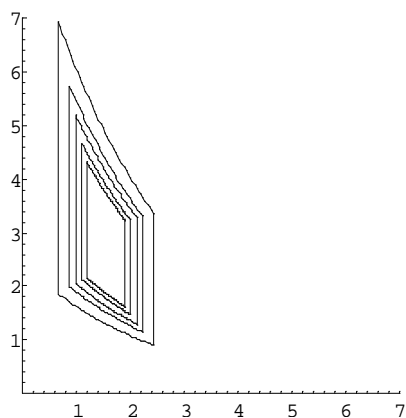
kunnossapitojaksoja 2



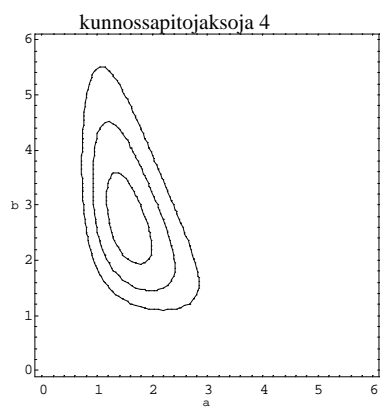
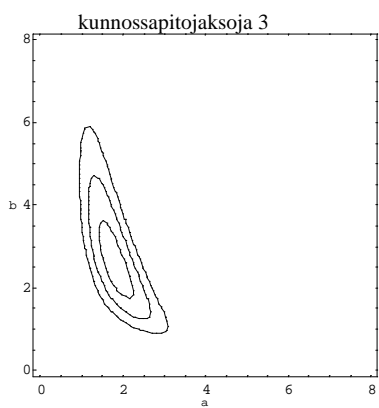
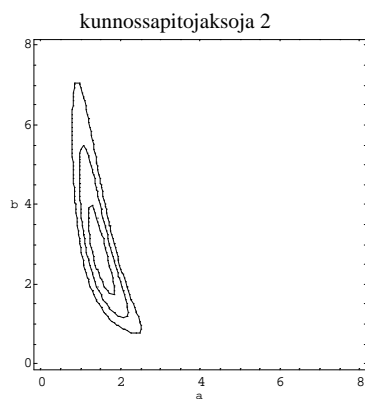
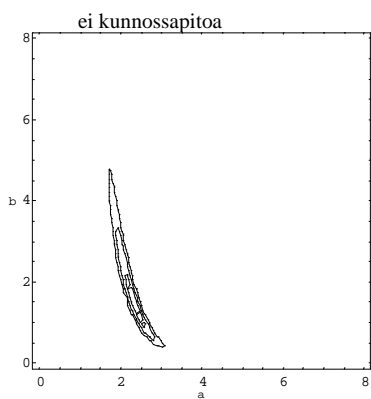
kunnossapitojaksoja 3



kunnossapitojaksoja 4



USKOTTAVUUSJOUKOT



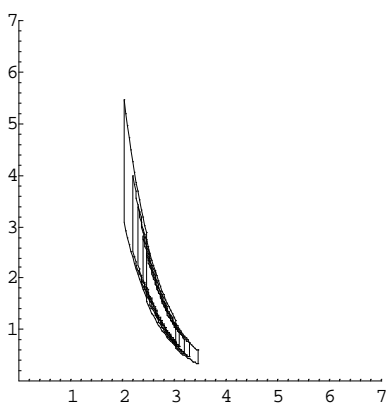
	EI KUPIA	KUPIJAKSOJA 2	KUPIJAKSOJA 3	KUPIJAKSOJA 4
$\hat{\alpha}$	2.36	1.49	1.81	1.55
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(1.80 , 2.91) 1.11	(0.838 , 2.15) 1.31	(1.00 , 2.62) 1.62	(0.742 , 2.35) 1.61
luottamustaso 95%	(1.96 , 2.75) 0.790	(1.03 , 1.96) 0.930	(1.24 , 2.38) 1.14	(0.977 , 2.11) 1.13
luottamustaso 90%	(2.05 , 2.66) 0.610	(1.13 , 1.86) 0.730	(1.36 , 2.26) 0.90	(1.10 , 1.99) 0.890
luottamustaso 80%	(2.15 , 2.56) 0.410	(1.26 , 1.73) 0.470	(1.52 , 2.10) 0.580	(1.25 , 1.84) 0.590
luottamustaso 70%	(2.23 , 2.48) 0.250	(1.35 , 1.64) 0.290	(1.63 , 1.99) 0.360	(1.36 , 1.73) 0.370
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 50%	(1.70 , 3.16) 1.46	(0.793 , 2.52) 1.73	(0.948 , 3.08) 2.13	(0.719 , 2.84) 2.12
uskottavuustaso 10%	(1.88 , 2.91) 1.03	(0.967 , 2.19) 1.22	(1.16 , 2.66) 1.50	(0.917 , 2.41) 1.49
uskottavuustaso 1%	(2.08 , 2.65) 0.570	(1.19 , 1.85) 0.660	(1.43 , 2.25) 0.820	(1.17 , 1.99) 0.820

$\hat{\beta}$	1.43	2.71	2.57	2.67
---------------	------	------	------	------

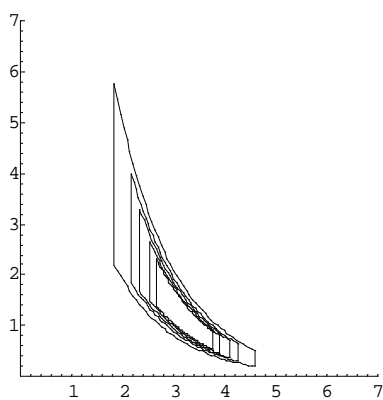
Aineisto 5 ($\alpha = 3, \beta = 1, t_0 = 4.75$)

LUOTTAMUSJOUKOT

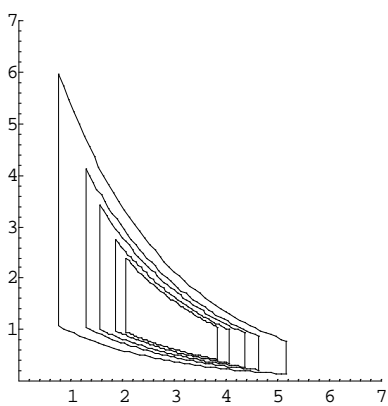
ei kunnossapitoa



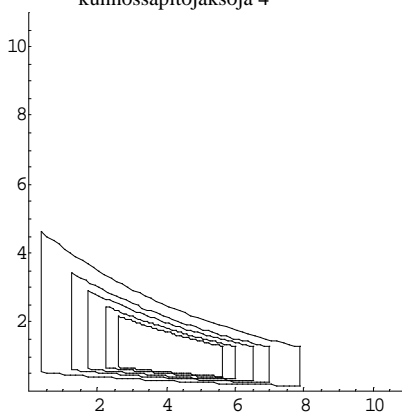
kunnossapitojaksoja 2



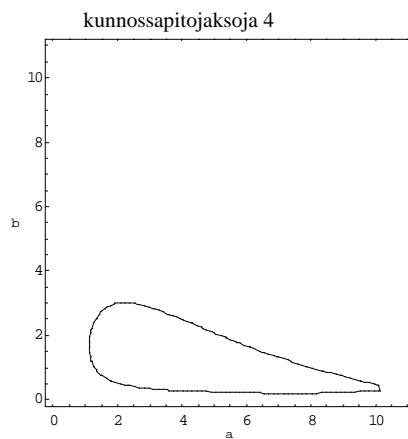
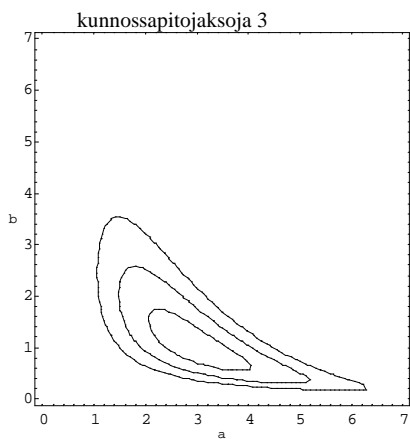
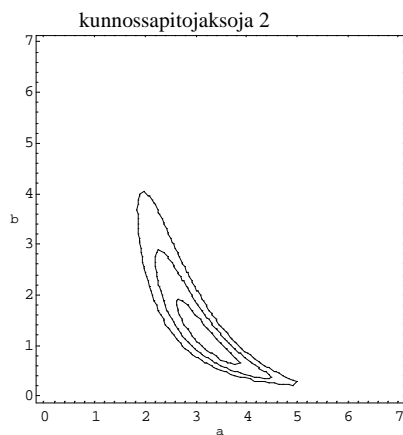
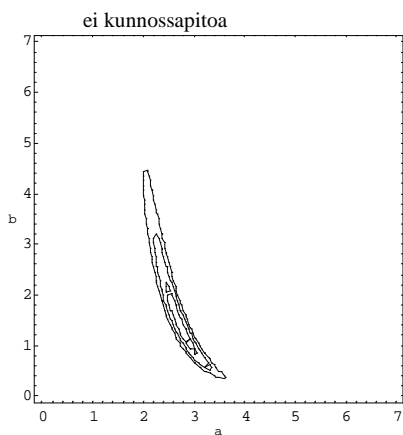
kunnossapitojaksoja 3



kunnossapitojaksoja 4



USKOTTAVUUSJOUKOT



	EI KUPIA	KUPIJAKSOJA 2	KUPIJAKSOJA 3	KUPIJAKSOJA 4
$\hat{\alpha}$	2.75	3.22	2.96	4.12
LUOTTAMUSVÄLIT				
luottamustaso 99%	(2.11 , 3.39) 1.28	(1.97 , 4.47) 2.50	(0.972 , 4.95) 3.98	(0.732 , 7.52) 6.79
luottamustaso 95%	(2.29 , 3.20) 0.910	(2.34 , 4.10) 1.76	(1.55 , 4.36) 2.81	(1.73 , 6.52) 4.79
luottamustaso 90%	(2.39 , 3.10) 0.710	(2.53 , 3.91) 1.38	(1.86 , 4.05) 2.19	(2.26 , 5.99) 3.73
luottamustaso 80%	(2.52 , 2.98) 0.460	(2.77 , 3.67) 0.900	(2.24 , 3.68) 1.44	(2.90 , 5.35) 2.45
luottamustaso 70%	(2.60 , 2.89) 0.290	(2.94 , 3.50) 0.560	(2.51 , 3.41) 0.900	(3.36 , 4.89) 1.53
USKOTTAVUUSVÄLIT				
uskottavuustaso 1%	(1.99 , 3.67) 1.68	(1.85 , 5.13) 3.28	(1.06 , 6.36) 5.30	(1.12 , 10.3) 9.18
uskottavuustaso 10%	(2.20 , 3.38) 1.18	(2.20 , 4.51) 2.31	(1.48 , 5.19) 3.71	(1.73 , 8.09) 6.36
uskottavuustaso 50%	(2.44 , 3.09) 0.650	(2.63 , 3.89) 1.26	(2.06 , 4.08) 2.02	(2.64 , 6.09) 3.45

$\hat{\beta}$	1.37	1.11	1.03	0.985
---------------	------	------	------	-------

5.2.2 Saatujen tulosten arviointia

Ensimmäinen havainto on samansuuntainen kuin jakauma-aineistojenkin kohdalla. Sensurointi näyttäisi kasvattavan parametrien uskottavuus- ja luottamusjoukkojen kokoa. Tämä pätee sekä tarkkailuajan vaikutukseen että kunnossapidon vaikutuksiin. Tarkastellaan näitä erikseen hieman tarkemmin.

Tarkkailuajan lyhentäminen siis selvästikin kadottaa informaatiota. Intuitiivisesti onkin selvää, että mitä lyhyemmältä ajalta vikatiedot on kerätty, sitä vähemmän on vikaantumisia sattunut ja sitä vähemmän on käytössä kohteen vikaantumiskäyttäytymistä kuvaavaa tietoa. Tarkkailuajan lisäksi vaikutusta on myös sillä, millainen taustalla oleva prosessi on. Kun kyseessä on prosessi, jossa vikaantumisten väliset ajat pitenevät ajan myötä (parantuva järjestelmä), ei tarkkailuajan lyhentämisellä ole niin suurta vaikutusta kuin päinvastoin käyttäytyvällä prosessilla (huonontuva järjestelmä). Tämä selittyy sillä, että parantuvassa järjestelmässä vikaantumisia sattuu alussa tiheämmin ja näin ollen vikaantumisten lukumäärä on alussa suuri. Näin ollen lyhyemmässäkin tarkkailuajassa ehtii sattua paljon vikaantumisia eivätkä loppupään harvat vikaantumiset tuo ratkaisevaa lisätietoa koskien järjestelmän vikaantumiskäyttäytymistä. Toisin on huonontuvan järjestelmän kohdalla, jossa tarkkailuajan lyhentämisellä on huomattavasti dramaattisemmat seuraukset. Luottamus- ja uskottavuusjoukkojen koot kasvavat melko nopeasti sitä mukaa kun tarkkailuaikaa lyhennetään ja ajansäästö näkyy heti menetettynä informaationa. Selitys on vastaava kuin parantuvankin järjestelmän kohdalla. Vikaantumisia sattuu lukumääräisesti eniten tarkkailujakson loppupuolella, ja tarkkailuajan lyhentäminen jättää jäljelle vain alun harvat vikaantumiset. Kun käytettävissä on vain vähän vikatietoa on selvää, että niistä tehtävien tilastollisten päätelmien epävarmuuden aste on suuri.

Kunnossapidon vaikutuksia on tutkittu vain huonontuvan järjestelmän osalta, eli silloin kun järjestelmän vikaantumiskäyttäytymisessä on havaittavissa lyhenevien vikavälien trendi. Tälle valinnalle on perusteluna se, että ajatus parantuvan järjestelmän kunnossapidosta (siis palautuksesta uutta vastaavaan kuntoon eli tässä tapauksessa “huononnuksesta”) on järjetön.

Kunnossapidon vaikutukset parametrien luottamus- ja uskottavuusjoukkoihin ovat pitkälle samankaltaisia kuin tarkkailuajan vaikutukset. Mitä useampaa kunnossapitojaksoon tarkkailuaika on jaettu, sitä suuremmiksi paisuvat parametrien luottamus- ja uskottavuusjoukot. Selitys tähän on samantapainen kuin tarkkailuajankin kohdalla. Kukin kunnossapito aina katkaisee järjestelmän tihenevien vikaantumisten sarjan, ja aloittaa prosessin taas alusta. Siispä mitä useampaan kunnossapitojaksoon alkuperäinen tarkkailuaika jaetaan, sitä vähemmän jää jäljelle varsinaista vikatieta ja näin ollen tilastollinen päättely käy hankalammaksi.

Eräs merkillepantava seikka on luottamus- ja uskottavuusjoukkojen muoto. Joukot ovat hyvin pitkänomaisia ja havaittavissa on muoto- ja asteikkoparametrin välillä vallitseva negatiivinen korrelaatio.

6 Loppupäätelmät

Työn alussa esitettiin ajatus, että sensurointi kadottaa informaatiota ja lisää vikatiedoista tehtävien päätelmien epävarmuutta. Tätä ajatusta haluttiin tutkia ja samalla selvittää sensuroinnin vaikutuksia hieman tarkemmin. Tutkimusmenetelmäksi valittiin simulointi, koska simuloitujen aineistojen avulla päästiin käsiksi nimenomaan sensuroinnin vaikutuksiin. Tutkimuksen kohteeksi valittiin ns. Weibull-mallit (Weibull-jakauma ja Weibull-prosessi), koska haluttiin edustajat sekä jakauma- että prosessimallista ja nämä ovat kaksi käyttövarmuuslaskennassa melko yleisesti käytössä olevaa mallia.

Yksinkertaistettuna tulos on selvä: sensurointi kadottaa informaatiota ja sensuroinnin asteen kasvaessa myös vikatiedoista tehtävien päätelmien tilastollinen epävarmuus kasvaa. Tämä pätee sekä Weibull-jakaumaan, että prosessiin.

Jakaumamallin kohdalla sensurointi käsitteenä on melko yksiselitteinen. Tämä johtuu siitä, että puhuttaessa jakaumasta kyseessä ovat aina riippumattomat ja samoin jakautuneet satunnaismuuttujat (esim. yksiköiden elinajat). Tällöin sensuroinnin astetta voidaan kasvattaa yksinkertaisesti lopettamalla koe aikaisemmin niin, että yhä harvempi yksikkö on ehtinyt vikaantua. Weibull-jakaumasta simuloitujen aineistojen tarkastelu osoitti, että sensuroinnin asteen kasvaessa jakauman parametrien luottamusjoukot kasvoivat. Sensuroinnin asteen lisäksi näihin vaikutti taustalla oleva jakauma. Suurimman uskottavuuden estimaatteihin, odotusarvoon ja varianssiin (siis piste-estimaatteina) sensuroinnilla ei ollut juurikaan vaikutusta.

Prosessimallin kohdalla huomattiin, että sensurointi käsitteenä ei (aivan yksinkertaisimpia tapauksia lukuun ottamatta) enää olekaan niin yksinkertainen ja yksiselitteinen. Työssä päädyttiin tarkastelemaan kahta "sensurointityyppiä" - tarkkailujan vaikutusta sekä kunnossapidon aiheuttamaa sensurointia. Weibull-prosessista simuloitujen aineistojen tarkastelu osoitti, että sensuroinnin vaikutukset ovat samantapaisia kuin jakaumamallinkin kohdalla. Prosessin parametrien luottamusjoukkojen koot kasvavat sensuroinnin asteen kasvaessa ja sensuroinnin lisäksi vaikutusta on myös taustalla olevalla prosessilla.

Mitä näistä tuloksista sitten voidaan päätellä? Koska tähtäin on lopulta käytännön sovelluksissa, pyritään tarkastelemaan asiaa käytännön kannalta.

Ensimmäinen huomioon otettava seikka on varmastikin se, että sensurointi tulisi ylipäättään ottaa huomioon käyttövarmuuslaskennassa. Nykyiset datankeruujärjestelmät ovat usein jättäneet sensuroinnin täysin huomiotta kirjaamalla sensuroidut ja sensuroimattomat havainnot samalla tavalla. Muistiin on esimerkiksi kirjattu vain vaihdetut osat, mutta ei tietoa siitä, onko osa vaihdettu sen vikaannuttua vaiko esimerkiksi kunnossapidon yhteydessä. Tällaisesta vikatiedosta voidaan tietenkin tehdä data-analyseja ja laskea erilaisia tunnuslukuja. Edellä saatujen tulosten valossa on kuitenkin selvää, että tällaisesta “väärin” kerätystä vikatiedosta tehtävät päätelmät voivat olla hyvinkin harhaanjohtavia, koska sensuroinnin aiheuttama luottamusvälien kasvu jää huomioon ottamatta. Pelkät piste-estimaatit eivät kerro läheskään koko totuutta, vaan myös luottamusjoukkojen kasvaminen on otettava huomioon. Koska kerättävä vikatieto on kuitenkin lähes aina jollain tavalla sensurointia sisältävää, tulisi sensurointi ottaa huomioon jo vikatiedon keruuta suunniteltaessa. On myös hyväksyttävä se seikka, että vaikka käytettävissä on huolellisesti kerättyä vikatietoa, ei siitä voida tilastollisin menetelmin saada irti mitään “varmaa”. Tällöin on mietittävä, voisivatko muut menetelmät (esim. asiantuntija-arvioihin perustuvat) tukea tilastoanalyysia.

Aihepiiri sisältää runsaasti mahdollisia jatkotarkasteluiden aiheita. Eräs tarpeellisimmista olisi varmastikin ns. epätäydellisen korjauksen malli, johon työn alussa lyhyesti viitattiin (liittyy siis korjattavien järjestelmien mallinnukseen). Tässä esityksessä käytössä olevilla menetelmillä joudutaan aina tekemään oletus joko vähimmäiskorjauksesta (as bad as old) tai korjauksesta uutta vastaavaan kuntoon (as good as new). Nämä oletukset sisältävät selvästikin melkoisia yksinkertaistuksia monissa käytännön tilanteissa. Esimerkiksi vuosihuollon yhteydessä voidaan ajatella huoltotoimenpiteillä olevan kohdetta parantava vaikutus, mutta toisaalta oletus uutta vastaavasta on vahvasti liioiteltu.

Lähdeluettelo

Akersten, P.A. (1991): *Repairable Systems Reliability, Studied by TTT-Plotting Techniques*, Ph.D Dissertation, Division Of Quality Technology, Department Of Mechanical Engineering, Linköping University, Sweden.

Andersen, P.K., Borgan, O., Gill, R.D. & Keiding, N. (1993): *Statistical Models Based on Counting Processes*, Springer-Verlag, New York.

Ascher, H. & Feingold, H. (1984): *Repairable Systems Reliability: Modeling, Inference, Misconceptions and their Causes*, Marcel-Dekker, New York.

Atwood, C.L. (1991): *Parametric Estimation of Time Dependent Failure Rates for Probabilistic Risk Assessment*, Reliability Engineering and System Safety **37**:181 - 194.

Aven, T. (1983): *Optimal Replacement Under a Minimal Repair Strategy - a General Failure Model*, Advances in Applied Probability **15**:198 - 211.

Badenius, D. (1970): *Failure Rate/MTBF*, IEEE Trans. R-19, 66 - 67.

Bain, L. & Engelhardt, M.(1991): *Statistical Analysis of Reliability and Life-testing Methods*, Marcel-Dekker, New York.

Bain, L., Engelhardt, M. & Wright, F.T. (1985): *Tests for an Increasing Trend in the Intensity of a Poisson Process*, Journal of the American Statistical Association **80**:419 - 422.

Basawa, Ishwar V. & Prakasa, Rao, B. L. S. (1980): *Statistical inference for stochastic processes*, Academic Press, London. 435 s.

Brown, M. & Proschan, F. (1983): *Imperfect repair*, Journal of Applied Probability **20**:851 - 859.

Cox, D.R. (1962): *Renewal Theory*, Methuen, London.

Cox, D.R. & Lewis, P.A.W. (1966): *The Statistical Analysis of Series of Events*, Methuen, London.

- Cox, D.R. & Oakes, D. (1984): *Analysis of Survival Data*, Chapman and Hall, London.
- Crowder, M.J., Kimber, R.L., Smith & Sweeting, T.J. (1991): *Statistical Analysis of Reliability Data*, Chapman and Hall, New York.
- Elandt-Johnson, R.C. & Johnson, N.L. (1980): *Survival Models and Data-analysis*, John Wiley, New York.
- Elfving, G. & Tuominen, P. (1990): *Todennäköisyysslaskenta II*, Limes ry, Helsinki.
- Hoyland, A. & Rausand, M. (1994): *System Reliability Theory - Models and Statistical Methods*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Johnson, N.L. & Kotz, S.(1969): *Discrete Distributions*, Wiley & Sons, New York.
- Kalbfleisch, J.G. (1979): *Probability and Statistical Inference, Volume 1*, Springer-Verlag, New York.
- Kalbfleisch, J.G. (1985): *Probability and Statistical Inference, Volume 2: Statistical Inference*, Springer-Verlag, New York.
- Kalbfleisch, J.D. & Prentice, R.L. (1980): *The Statistical Analysis of Failure Time Data*, Wiley, New York.
- MIL-HDBK-189 (1981): *Reliability Growth Management*, U.S. Department of Defence, Washington, DC.
- Ross, S.M. (1983): *Stochastic Processes*, John Wiley, New York.
- Roussas, George G. (1973): *A First Course in Mathematical Statistics*, Addison-Wesley Publishing Company, London.
- Thompson, W.A., Jr. (1981): *On The Foundations of Reliability*, Technometrics **23**:1 - 13

Estimoinnin reunaehdoja

Kun kohteiden elinaikaa mallinnetaan elinaikajakaumien, kuten Weibull-jakauman tai eksponenttijakauman avulla, on taustalla aina oletus riippumattomista ja samoin jakautuneista elinajoista. Jotta tällaisen mallin käyttö olisi mielekästä, tulisi aina ensin varmistua siitä, että nämä oletukset todellakin ovat voimassa. Sanomattakin on selvää, että malli, jonka oletuksien voimassaolosta ei ole varmuutta, on epäluotettava ja saattaa johtaa virheellisiin tuloksiin. Varsinkin silloin kun kyseessä on korjattava järjestelmä, on aina varmistettava, että kyseessä todellakin on uusiutumisosprosessi (jossa siis vikaantumisten väliajat ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita) ennen kuin ryhdytään mallinnukseen jonkin elinaikajakauman avulla. Jos osoittautuu, että järjestelmän vikaantumiskäyttäytyminen noudattaa jotakin trendiä (eli vikaantumisten väliajat kasvavat tai lyhenevät ajan myötä), ei elinaikamallinnusta voida tehdä, vaan on ryhdyttävä tutkimaan muita mahdollisuuksia (esimerkiksi mallinnusta epähomogeenisen Poisson-prosessin avulla).

Tässä esityksessä käydään suppeasti läpi vain muutamia menetelmiä. Aihetta käsitellään laajemmin esimerkiksi viitteessä Andersen et. al. (1993).

Ensimmäinen arviointi vikadatasta olisi aina hyvä tehdä silmämääräisesti graafisen kuvan avulla. Kun kyseessä on korjattava järjestelmä, on ensin selvitettävä voisiko vikaantumisosprosessi olla uusiutumisosprosessi vai tapahtuuko absoluuttisessa vikataajuudessa ajan mittaan muutoksia (eli kysymyksessä voisi olla epähomogeeninen Poisson-prosessi). Tähän tarkoitukseen soveltuu ns. **vikakertymäkuvaaja**, jossa vaaka-akseli kuvaa aikaa ja pystyakseli kertyneiden vikaantumisten lukumäärää. Vikakertymäkuvaajan tukena olisi hyvä käyttää myös ns. **trenditestejä**, jotka tarjoavat muodollisemman tavan testata mahdollisen trendin olemassaoloa. Jos prosessi todetaan uusiutumisosprosessiksi, voidaan olettaa vikaantumisten väliaikojen olevan peräisin jostakin elinaikajakaumasta, ja siirtyä käyttämään menetelmiä, joiden tarkoituksena on selvittää taustalla olevan elinaikajakauman ominaisuuksia. Tähän tarkoitukseen

sopiva graafinen menetelmä on esimerkiksi **TTT-kuvaaja**. Silloin kun kysymyksessä ovat riippumattomat ja samankaltaiset yksiköt, voidaan perustellusti siirtyä suoraan TTT-kuvaajan käyttöön.

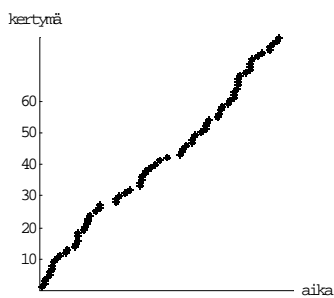
VIKAKERTYMÄKUVAAJA

Järjestelmä on asetettu toimintaan hetkellä $t=0$ ja sille on mitattu vikaantumisaajat (kalenteriaikoja) t_1, t_2, \dots, t_n ($t_1 < t_2 < \dots < t_n$). Nyt halutaan selvittää, voisiko kyseessä olla uusiutumisosprosessi (jolloin vikaantumisten väliajat $x_i = t_i - t_{i-1}$ ovat peräisin samasta elinaikajakaumasta) vai mahdollisesti epähomogeeninen Poisson-prosessi (jolloin vikaantumisten väliajat kasvavat tai lyhentyvät ajan kuluessa). Aineistoa kuvaava vikakertymäkuvaaja saadaan piirtämällä pisteet $(t_i, N(t_i))$, $i = 1, \dots, n$, eli vaaka-akseli kuvaa aikaa ja pystyakseli kertyneiden vikaantumisten lukumäärää. Jos kuvaan piirretyt pisteet näyttävät asettuvan lineaarisesti, viittaa tämä uusiutumisosprosessiin (eli vikaantumisten väliaikojen riippumattomuuteen ja samoin jakautuneisuuteen) ja voidaan siirtyä jatkotarkasteluihin koskien jakaumamallinnusta. Jos muoto sitä vastoin ei näytä lineaariselta, on oletus riippumattomuudesta ja samoinjakautuneisuudesta hylättävä ja siirryttävä tutkimaan mallinnusta jonkin prosessimallin avulla.

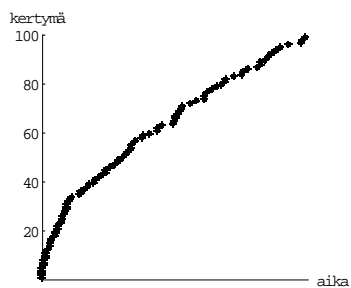
Vikakertymäkuvaajan tulkinnan peukalosääntöjä:

- A. **pisteet asettuvat lineaarisesti** - viittaa siihen, että vikaantumisten väliajat olisivat riippumattomia ja samoin jakautuneita eli kyseessä on uusiutumisosprosessi. Prosessi on kenties mahdollista mallintaa jonkin elinaikajakauman avulla (Weibull-jakauma, eksponenttijakauma).
- B. **pisteet asettuvat muulla tavoin "monotonisesti"** - (eli pisteisiin sovitetun käyrän tangentin kulmakerroin joko kasvaa tai pienenee ajan myötä) viittaa siihen, että vikaantumisten sarja noudattaisi jotakin trendiä ("paranee", "huononee"). Kyseessä voi olla epähomogeeninen Poisson-prosessi, esim. Weibull-prosessin.
- C. **selkeitä jaksoja peräkkäin** - jaettava trendin suhteen monotonisiin osiin. Yleensä ollaan kiinnostuneita siitä, milloin järjestelmä saavuttaa stationaarisen vaiheen (jos saavuttaa!)
- D. **havaittavissa jotakin säännönmukaisuutta** - -kyseessä voi olla kausivaihtelu yms.

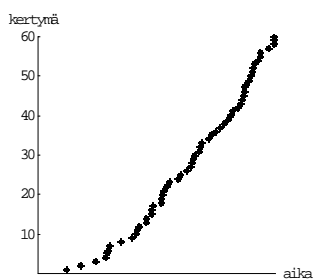
Kuvassa L1.1 on esimerkkejä vikakertymäkuvaajista joissakin tyypillisissä tapauksissa.



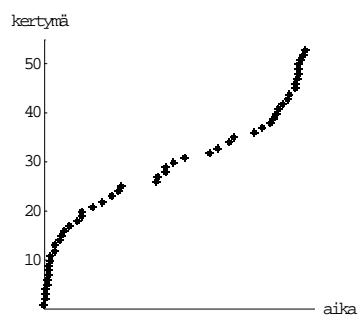
TAPAUS A



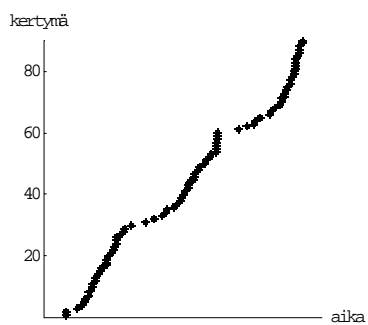
TAPAUS B



TAPAUS B



TAPAUS C



TAPAUS C

Kuva L1.1: Esimerkkejä vikakertymäkuvaajista.

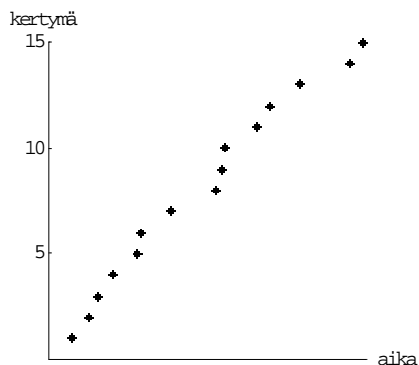
Vikakertymäkuvaajan käyttöä valotetaan seuraavassa kahden esimerkin avulla. Ensimmäisen esimerkin havaintoaineisto koostuu viidentoista komponentin mitatuista elinajoista. Aineisto on esitetty taulukkona, josta käyvät ilmi vikaantumisten lukumäärä, vikaantumisten väliajat ja kalenteriaika. Tarkoitus on siis tutkia, voisivatko x_i :t (vikaantumisten väliajat) olla riippumattomia ja samoin jakautuneita.

Taulukko L1.1: Esimerkkiaineisto 1.

$N(t)$	x_i	t_i
0	0	0
1	1.174	1.174
2	0.766	1.940
3	0.485	2.425
4	0.692	3.117
5	1.118	4.235
6	0.144	4.378
7	1.401	5.779
8	2.127	7.906
9	0.317	8.223
10	0.152	8.376
11	1.493	9.869
12	0.649	10.519
13	1.355	11.874
14	2.395	14.269
15	0.606	14.875

Nyt voidaan piirtää itse kuvaaja. Koska laskuriprosessissa $N(t)$ on vakio vikaantumisten välillä, on perusteltua piirtää näkyviin vain pisteet joissa $N(t)$ kasvaa yhdellä eli pisteet $(t_i, N(t_i))$, $i=1, \dots, 15$.

Vikakertymäkuvaaja kyseiselle aineistolle on esitetty kuvassa L1.2.



Kuva L1.2: Esimerkkiaineistosta 1 piirretty vikakertymäkuvaaja.

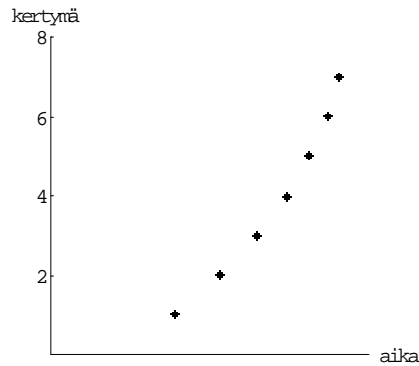
Pisteet näyttäisivät asettuvan melko lineaarisesti, joten oletus riippumattomuudesta ja samoin jakautuneisuudesta jää ainakin tässä vaiheessa voimaan (huom. “jäädä voimaan” ei vielä tarkoita hyväksymistä).

Toisen esimerkin aineiston esittävät Ascher ja Feingold (1984). Vikaantumisajat on mitattu hetkestä $t = 0$ kunnes seitsemän vikaantumista on ilmaantunut (vikasensurointi). Vikaantumisajat on mitattu yhdestä ainoasta järjestelmästä ja korjausajat (yksikkönä vuorokausi) oletetaan niin pieniksi, että ne voidaan jättää huomiotta.

Taulukko L1.2: Esimerkkiaineisto 2.

$N(t)$	x_i	t_i
0	0	0
1	177	177
2	65	242
3	51	293
4	43	336
5	32	368
6	27	395
7	15	410

Aineistosta piirretty vikakertymäkuvaaja on kuvassa L1.3.



Kuva L1.3: Esimerkkiaineistosta 2 piirretty vikakertymäkuvaaja.

Vikaantumisten väliajat näyttäisivät lyhenevän ajan myötä. Mitä kauemmin järjestelmä on toiminnassa, sitä tiheämmin vikaantumisia ilmaantuu. Tällaista järjestelmää kutsutaan huonontuvaksi järjestelmäksi (sad system). Vastaavasti järjestelmää, jossa vikaantumisten väliajat pitenevät ajan myötä, kutsutaan parantuvaksi järjestelmäksi (happy system). Selvästikään tällaisen aineiston väliajoille ei voida olettaa riippumattomuutta ja samoin jakautuneisuutta, joten kyseessä ei ole uusiutumisosprosessi eikä aineistoa voida kuvata millään elinaikajakaumalla. Kyseessä voisi olla esim. epähomogeeninen Poisson-prosessi, jonka mallinnusta käsiteltiin kappaleessa 4.3.

Muodollisemman testaustavan mahdolliselle trendille (tai trendittömyydelle) tarjoavat erilaiset tilastolliset testit. Tässä esityksessä näistä tarkastellaan kahta: **Laplacen trenditestiä** ja **The Military Handbook testiä**. Yksityiskohtaisen esityksen näistä tarjoavat Ascher ja Feingold (1984) sekä Crowder et al. (1991). Voidaan osoittaa, että Laplacen testi on optimaalinen, kun taustalla oleva vikaantumismekanismi on log-lineaarinen (ks. Cox ja Lewis (1966)).

Military Handbook test on puolestaan optimaalinen, kun todellinen vikaantumismekanismi on Weibull-prosessin mallin mukainen (ks. Bain et al. (1985)).

Merkitään molemmille testeille yhteisiä hypoteeseja seuraavasti:

nollahypoteesi

H_0 : Ei trendiä (täsmällisemmin sanottuna vikaantumisten väliajat ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, eli kyseessä on homogeeninen Poisson-prosessi tai uusiutumispörosessi).

Vaihtoehtoinen hypoteesi

H_1 : Monotoninen trendi (eli järjestelmä on parantuva (happy) tai huonontuva (sad)).

LAPLACEN TRENDITESTI

Laplacen trenditesti on yksinkertainen ja tehokas tapa testata mahdollisen trendin olemassaoloa. Testin rajoituksena on sen soveltuvuus ainoastaan monotonisen trendin testaamiseen. Monotonisuuden voi tutkia esimerkiksi edellä esitellyllä vikakertymäkuvaajalla. Testi on hieman erilainen vikasensuroidulle ja aikasensuroidulle aineistolle.

Tapaus 1: Vikaantumiset on mitattu kunnes n vikaantumista on sattunut (vikasensurointi)

Testitunnusluku U lasketaan kaavasta

$$(L1.1) \quad U = \sqrt{12(n-1)} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} t_i - (n-1) \frac{t_n}{2}}{(n-1)t_n} ,$$

missä t_1, t_2, \dots, t_n ovat vikaantumisaikoja (kalenteriaikoja)

Tapaus 2: Vikaantumisaajat on mitattu hetkeen $t = t_0$ asti (aikasensurointi)

Testitunnusluku U lasketaan kaavasta

$$(L1.2) \quad U = \sqrt{12n} \frac{\sum_{i=1}^n t_i - \frac{nt_0}{2}}{nt_0},$$

missä t_1, t_2, \dots, t_n ovat vikaantumisaikoja (kalenteriaikoja).

Molemmissa tapauksissa U on nollahypoteesin ollessa voimassa likimäärin standardinormaalisti jakautunut eli $U \sim N(0,1)$. Siten lähellä nollaa olevat U :n arvot puhuvat sen puolesta, että vikaantumisten väliajat ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Negatiiviset U :n arvot viittaavat parantuvaan järjestelmään ja positiiviset taas huonontuvaan järjestelmään.

Jatketaan edellisen kappaleen esimerkkejä ja lasketaan molemmille aineistoille Laplacen testin tunnusluku. Ensimmäisestä aineistosta laskettuna $U = -0.625$ ja toisesta $U = 2.004$ (molemmat tunnusluvut on laskettu tapauksen 1 mukaan, sillä molempia aineistoja voidaan pitää vikasensuroituina). Laplacen testi näyttäisi tukevan vikakertymäkuvaajasta saatuja alustavia tuloksia Tosin molemmat aineistot ovat niin pieniä, että satunnaisvaihtelun vaikutus on suhteessa suurta eikä testien perusteella siten voida tehdä varmoja johtopäätöksiä.

THE MILITARY HANDBOOK TESTI

(MIL-HDBK-189, 1981)

Tapaus 1: Vikaantumiset on mitattu kunnes n vikaantumista on sattunut (vikasensurointi)

Testitunnusluku Z lasketaan kaavasta

$$(L1.3) \quad Z = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{t_n}{t_i} ,$$

missä t_1, t_2, \dots ovat vikaantumisaikoja (kalenteriaikoja).

Tapaus 2: Vikaantumisaikat on mitattu hetkeen $t = t_0$ asti (aikasensurointi)

Testitunnusluku Z lasketaan kaavasta

$$(L1.4) \quad Z = 2 \sum_{i=1}^n \ln \frac{t_0}{t_i} .$$

Tunnusluvun Z asympotoottinen jakauma on molemmissa tapauksissa χ^2 jakauma vapausastein $2(n-1)$ (tapaus 1) ja $2n$ (tapaus 2). Nollahypoteesi ”ei trendiä” hylätään suurilla tai pienillä Z :n arvoilla. Suuret vastaavat parantuvaa järjestelmää ja pienet huonontuvaa.

Jatketaan jälleen esimerkkejä ja lasketaan testitunnusluku Z molemmille aineistoille. Ensimmäisestä aineistosta saadaan $Z = 28.401$ (vapausasteet 28) ja toisesta $Z = 4.095$ (vapausasteet 12). Myös nämä tukevat edellisten kohtien tuloksia.

TOTAL TIME ON TEST -KUVAAJA (TTT)

(Hoyland & Rausand (1984))

Nyt ollaan siis päätelty vikakertymäkuvaajan ja trenditestien avulla, että järjestelmän vikaantumisten väliaikoja voidaan pitää riippumattomina ja samoin jakautuneina. Nämä vikaantumisten väliajat voidaan siis matemaattisessa mielessä rinnastaa riippumattomien ja samankaltaisten yksiköiden elinaikoihin ja mallintaa jonkin sopivan elinaikajakauman avulla. Voidaan siis ajatella, että kukin väliaika siirretään alkamaan origosta aivan kuin ne olisivat yhtäaikaan aktivoitavia yksiköitä. Ns. TTT-kuvaajan avulla voidaan päätellä onko taustalla olevalla (tuntemattomalla) elinaikajakaumalla pienenevä (DFR) tai kasvava (IFR) suhteellinen vikataajuus.

Merkitään:

n : vikaantumisten väliaikojen (tai yksiköiden) lkm
 x_i : i :s väliaika (tai i :nnen yksikön elinaika) ($i=1,2, \dots, n$)

$(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$: järjestetyt x_i :t ($x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$)

Tehdään testi taustalla olevan elinaikajakauman selvittämiseksi. Oletetaan, että kyseinen jakauma on jatkuva ja F on aidosti kasvava, kun $F^{-1}(0) = 0 < t < F^{-1}(x)$. Oletetaan edelleen, että jakaumalla on äärellinen keskiarvo μ .

Määritelmä L1.1

Kokeen kokonaisaika hetkellä t , merkitään $TOT(t)$, määritellään

$$(L1.5) \quad TOT(t) := \sum_{i=1}^j x_{(i)} + (n-j)t \quad ,$$

missä j on sellainen, että

$$x_{(j)} \leq t < x_{(j+1)} \quad , \text{ kun } j = 0, 1, \dots, n$$

ja

$$x_{(0)} := 0, \quad x_{(n+1)} := +\infty .$$

Kokeen kokonaisajalla hetkellä t tarkoitetaan n :n väliajan (tai yksikön) yhteenlaskettuja havaittuja elinikää hetkellä t . Oletetaan, että kaikki yksiköt aktivoidaan hetkellä $t = 0$ ja havainnointi lopetetaan hetkellä t . Aikavälillä $(0, t]$ on vikaantunut j yksikköä. Näiden j :n yksikön kokonaistoiminta-aika

on $\sum_{i=0}^j x_{(i)}$. Jäljellä olevat $(n - j)$ yksikköä selviävät aikavälin $(0, t]$. Näiden

$(n - j)$:n yksikön kokonaistoiminta-aika hetkellä t on tällöin $(n - j)t$.

Kokonaistoiminta-aika j :nnen vikaantumisen kohdalla on

$$(L1.6) \quad TOT(x_{(j)}) = \sum_{i=1}^j x_{(i)} + (n - j)x_{(j)} \quad , \text{ kun } j = 1, 2, \dots, n$$

Erityisesti

$$(L1.7) \quad \text{TOT}(x_{(n)}) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} = \sum_{i=1}^n x_i$$

Kokonaistestiaika i :nнен vikaantumisen kohdalla voidaan skaalata jakamalla se $\text{TOT}(x_{(n)})$:llä. Skaalattu kokonaistestiaika hetkellä t määritellään $\text{TOT}(t) / \text{TOT}(x_{(n)})$.

Määritelmä L1.2

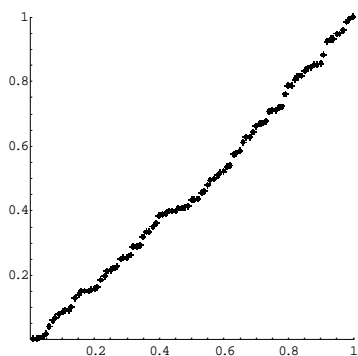
TTT-kuvaaja saadaan piirtämällä pisteet

$$\left(\frac{i}{n}, \frac{\text{TOT}(x_{(i)})}{\text{TOT}(x_{(n)})} \right), \text{ kun } i = 1, 2, \dots, n$$

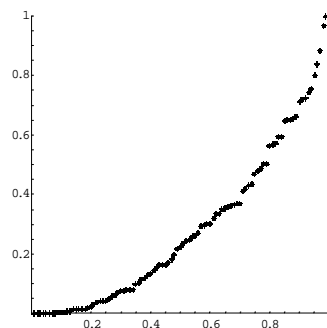
TTT-kuvaajan tulkinnan peukalosääntöjä:

- A. **pisteet asettuvat lineaarisesti** viittaa eksponenttijakaumaan
- B. **pisteisiin sovitetun käyrän kulmakerroin kasvaa** viittaa pienenevään vikataajuuteen (DFR)
- C. **pisteisiin sovitetun käyrän kulmakerroin pienenee** viittaa kasvavaan vikataajuuteen (IFR)
- D. **ensin kasvaa sitten vähenee** viittaa ns. ammekäyrää noudattavaan vikataajuuteen

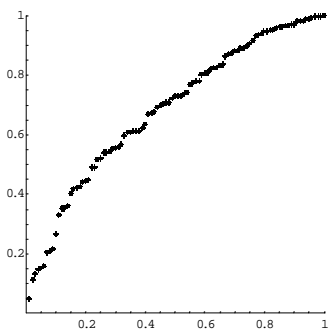
Kuvassa L1.4 on TTT-diagrammeja joissakin tyypillisissä tapauksissa.



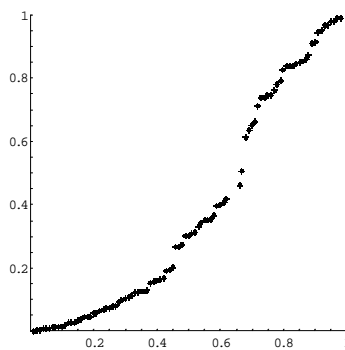
TAPAUS A



TAPAUS B



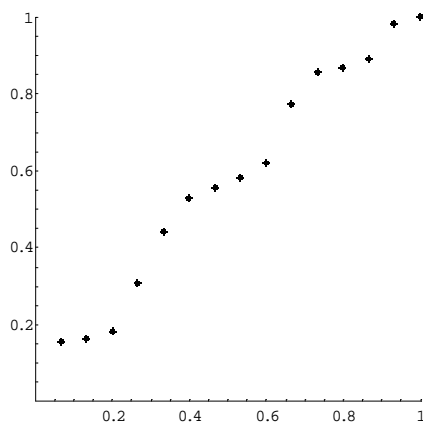
TAPAUS C



TAPAUS D

Kuva L1.4: Esimerkkejä TTT-kuvaajista.

Jatketaan esimerkkitapauksia ja piirretään havaittuja vikaantumisaineistoja vastaavat TTT-kuvaajat. Ensimmäistä aineistoa vastaava kuvaaja on kuvassa (L1.3). Jälkimmäinen aineisto ei täyttänyt vaatimuksia riippumattomuudelta ja samoin jakautuneisuudesta, joten sitä ei voida mallintaa minkään elinaikajakauman avulla. Näin ollen TTT-kuvaajaa ei tälle aineistolle piirretä.



Kuva L1.5: TTT-kuvaaja aineistolle 1.

Pisteet näyttävät asettuvan melko lineaarisesti, joten kyseessä voisi olla eksponenttijakauma.

Kun kyseessä on aineisto, joka sisältää sensuroituja havaintoja, poikkeaa TTT-kuvaajan piirto hieman edellä esitetystä. Tarkemmin aihetta käsittelee esimerkiksi teos Hoyland & Rausand (1984). Tässä esityksessä menetelmää ei käsitellä.

Sovitteen hyvyyden testaus

WEIBULL-JAKAUMA

Sovitteen hyvyyden testaukseen jakaumamallille ei tässä keskitytä tarkemmin, sillä aihetta käsittelevää kirjallisuutta löytyy hyvin runsaasti. Klassista χ^2 -testiä käsittelevät lähes kaikki tilastotieteen perusoppikirjat.

WEIBULL-PROSESSI

(IEC 1164 (1995))

Kun Weibull-prosessin muotoparametri α on estimoitu, voidaan testata sen sopivuutta aineistoon ns. Cramér-von Mises -testin avulla. Testitunnusluku $C^2(M)$ lasketaan seuraavasta kaavasta

$$(L2.1) \quad C^2(M) = \frac{1}{12M} + \sum_{i=1}^M \left(\left(\frac{t_i}{t} \right)^{\alpha} - \frac{2i-1}{2M} \right)^2,$$

missä

$M = n$ ja $t = t_0$, jos kyseessä on aikasensuroitu prosessi

$M = n - 1$ ja $t = t_n$, jos kyseessä on vikasensuroitu prosessi

ja $t_1 < t_2 < \dots < t_M$ ovat vikaantumisajat.

Taulukko (L2.1) antaa testitunnusluvun kriittiset rajat 10 %:n merkitsevyystasolla eri M :n arvoille. Jos laskettu testitunnusluku ylittää vastaavan kriittisen arvon, ei Weibull-prosessi testin valossa näytä sopivan aineistoon.

Taulukko L2.1. Testitunnusluvun kriittiset rajat 10 %:n merkitsevyystasolla eri M :n arvoille.

M	KRIITTINEN ARVO
3	0.154
4	0.155
5	0.160
6	0.162
7	0.165
8	0.165
9	0.167
10	0.167
11	0.169
12	0.169
13	0.169
14	0.169
15	0.169
16	0.171
17	0.171
18	0.171
19	0.171
20	0.172
30	0.172
≥ 60	0.173

HUOM aikasensuroidulle prosessille $M = n$ ja vikasensuroidulle $M = n - 1$

Graafinen tarkastelu voidaan suorittaa siten, että piirretään havaitut vikaantumisajat vs. odotetut vikaantumisajat eli pisteet $(t_i, E[t_i])$. Odotetut vikaantumisajat saadaan kaavasta

$$(L2.2) \quad E[t_i] = \left(\frac{i}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, i = 1, \dots, n$$

Pisteiden tulisi asettua mahdollisimman lähelle suoraa, joka kulkee origon kautta ja jonka kulmakerroin on 1. Mitä enemmän pisteet tästä suorasta poikkeavat, sitä huonommin Weibull-prosessi sopii aineistoon.

Todistuksia

TODISTUS SIVULLE 30

VÄITE

$$-2(l(\theta) - l(\hat{\theta})) \approx (\theta - \hat{\theta})^2 I(\hat{\theta}) \approx \chi^2(\dim(\theta)) \quad , \text{ kun } \dim(\theta) = 1$$

(yleistyy myös muille dimensioille)

TODISTUS

1° Muodostetaan Taylorin kehitelmä $l(\theta)$:lle pisteessä $\theta = \hat{\theta}$:

$$(L3.1) \quad l(\theta) = l(\hat{\theta}) + \frac{\theta - \hat{\theta}}{1!} l'(\hat{\theta}) + \frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{2!} l''(\hat{\theta}) + \frac{(\theta - \hat{\theta})^3}{3!} l'''(\hat{\theta}) + \dots$$

$$\Leftrightarrow l(\theta) - l(\hat{\theta}) = \frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{2!} l''(\hat{\theta}) + \frac{(\theta - \hat{\theta})^3}{3!} l'''(\hat{\theta}) + \dots$$

$$\Leftrightarrow l(\theta) - l(\hat{\theta}) = -\frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{2} I(\hat{\theta}) + \frac{(\theta - \hat{\theta})^3}{3!} l'''(\hat{\theta}) + \dots$$

Kun $|\theta - \hat{\theta}|$ on pieni, niin sen kolmas ja sitä suuremmat potenssit ovat pieniä, joten voidaan kirjoittaa

$$(L3.2) \quad l(\theta) - l(\hat{\theta}) \approx -\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^2 I(\hat{\theta})$$

mikä todistaa ensimmäisen väitteen.

2° Kappaleessa 3.5.3 (riippumattomien aineistojen yhdistäminen) näytettiin, että n :n riippumattoman aineiston yhdistetty logaritminen uskottavuusfunktio voidaan kirjoittaa summana

$$(L3.3) \quad l(\theta) = l_1(\theta) + l_2(\theta) + \dots + l_n(\theta)$$

Derivoidaan puolittain, saadaan

$$(L3.4) \quad l'(\theta) = l'_1(\theta) + l'_2(\theta) + \dots + l'_n(\theta)$$

Jos on havaittu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, missä x_i :t ovat riippumattomia havaintoja samasta jakaumasta, pätee näin ollen yhtälö (L3.4) havainnolle x .

Voidaan osoittaa, että $l'(\theta)$:lla on keskiarvo 0 ja varianssi $E(I(\theta))$ (ks. Kalbfleisch 1985, luku 11.6).

Keskeisen raja-arvolauseen mukaan saadaan (ks. Kalbfleisch 1979, luku 6.7.1)

$$(L3.5) \quad \frac{l'(\theta)}{\sqrt{E(I(\theta))}} \approx N(0,1) \quad , \text{ kun } n \text{ on tarpeeksi suuri}$$

Suurimman uskottavuuden estimaatti on yhtälön $l'(\hat{\theta}) = 0$ juuri ja voidaan osoittaa, että

$$(L3.6) \quad P(\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta) = 1$$

Tästä seuraa, että

$$(L3.7) \quad P(I(\hat{\theta}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(I(\theta))) = 1$$

Ja näin ollen (L3.5):sta saadaan

$$(L3.8) \quad \frac{l'(\theta)}{\sqrt{I(\hat{\theta})}} \approx N(0,1) \quad , \text{ kun } n \text{ on tarpeeksi suuri}$$

Tiedetään (kohta 1°), että

$$(L3.9) \quad l(\theta) - l(\hat{\theta}) \approx -\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^2 I(\hat{\theta})$$

Derivoidaan tämä θ :n suhteen, saadaan

$$(L3.10) \quad l'(\theta) \approx -(\theta - \hat{\theta})I(\hat{\theta})$$

Sijoitetaan tämä (L3.8):een saadaan

$$(L3.11) \quad -(\theta - \hat{\theta})\sqrt{I(\hat{\theta})} \approx N(0,1)$$

Korotetaan puolittain toiseen potenssiin

$$(L3.12) \quad (\theta - \hat{\theta})^2 I(\hat{\theta}) \approx \chi^2(1)$$

($Z \approx N(0,1) \Rightarrow Z^2 \approx \chi^2(1)$, ks Kalbfleisch 1979, luku 6.9.1)

TODISTUS SIVULLE 18

Oletetaan, että $N(t)$ on NHPP, jonka absoluuttinen vikataajuusfunktio on $v(t) > 0$. Oletetaan lisäksi, että kumulatiivisen vikataajuuden $V(t)$ käänteis-funktio $V^{-1}(t)$ on olemassa.

VÄITE

$N^*(t) = N(V^{-1}(t))$, $t > 0$ on HPP vakiovikataajuudella $\lambda = 1$.

TODISTUS

Näytetään, että määritelmän 3.3.3b kohdat 1.-3. pätevät.

1.

$N(0) = 0$ (NHPP:n määritelmä)

$$\Leftrightarrow N^*(V(0)) = 0$$

$$\Leftrightarrow N^*(0) = 0 \quad (V(0) = \int_0^{\cdot} v(t) dt = 0)$$

2.

Olkoon $t_1 \leq t_2 \leq s_1 \leq s_2$, jolloin $V^{-1}(t_1) \leq V^{-1}(t_2) \leq V^{-1}(s_1) \leq V^{-1}(s_2)$ (koska $V(t)$ on kasvava funktio). Nyt

$$\Pr[N^*(t_2) - N^*(t_1) = n, N^*(s_2) - N^*(s_1) = k]$$

$$= \Pr[N(V^{-1}(t_2)) - N(V^{-1}(t_1)) = n, N(V^{-1}(s_2)) - N(V^{-1}(s_1)) = k]$$

$$= \Pr[N(V^{-1}(t_2)) - N(V^{-1}(t_1)) = n] [N(V^{-1}(s_2)) - N(V^{-1}(s_1)) = k] \text{ (NHPP:n määritelmä)}$$

$$= \Pr[N^*(t_2) - N^*(t_1) = n] [N^*(s_2) - N^*(s_1) = k].$$

$N^*(t)$:lla on siis riippumattomat lisäykset.

3.

$$\Pr[N^*(t+s) - N^*(s) = n]$$

$$= \Pr[N(V^{-1}(t+s)) - N(V^{-1}(s)) = n]$$

$$= \frac{(V(V^{-1}(t+s)) - V(V^{-1}(s)))^n}{n!} \exp(-(V(V^{-1}(t+s)) - V(V^{-1}(s))))$$

(ks. Kaava (3.3.16))

$$= \frac{(t+s-s)^n}{n!} \exp(-(t+s-s))$$

$$= \frac{t^n}{n!} e^{-t} .$$

Vikaantumisten lukumäärä aikavälillä, jonka pituus on t, on siis Poisson(1)-jakautunut.

Kohdat 1.-3. todistavat väitteen.