

Heikki Marjamäki

## Siirtymäperusteisen elementtimenetelmäohjelmiston suunnittelu ja ohjelmointi



VTT PUBLICATIONS 501

# **Siirtymäperusteisen elementtimenetelmäohjelmiston suunnittelu ja ohjelmointi**

Heikki Marjamäki

VTT Tuotteet ja tuotanto



ISBN 951-38-6231-3 (nid.)

ISSN 1235-0621 (nid.)

ISBN 951-38-6232-1 (URL: <http://www.vtt.fi/inf/pdf/>)

ISSN 1455-0849 (URL: <http://www.vtt.fi/inf/pdf/>)

Copyright © VTT 2003

JULKAISIJA – UTGIVARE – PUBLISHER

VTT, Vuorimiehentie 5, PL 2000, 02044 VTT

puh. vaihde (09) 4561, faksi (09) 456 4374

VTT, Bergsmansvägen 5, PB 2000, 02044 VTT

tel. växel (09) 4561, fax (09) 456 4374

VTT Technical Research Centre of Finland, Vuorimiehentie 5, P.O.Box 2000, FIN-02044 VTT, Finland

phone internat. + 358 9 4561, fax + 358 9 456 4374

VTT Tuotteet ja tuotanto, Tekniikankatu 1, PL 1307, 33101 TAMPERE

puh. vaihde (03) 316 3111, faksi (03) 316 3495

VTT Industriella System, Tekniikankatu 1, PB 1307, 33101 TAMMERFORS

tel. växel (03) 316 3111, fax (03) 316 3495

VTT Industrial Systems, Tekniikankatu 1, P.O.Box 1307, FIN-33101 TAMPERE, Finland

phone internat. + 358 3 316 3111, fax + 358 3 316 3495

Toimitus Maini Manninen

Otamedia Oy, Espoo 2003

Marjamäki, Heikki. Siirtymäperusteisen elementtimenetelmäohjelmiston suunnittelu ja ohjelmointi [The design and programming of displacement based finite element software]. Espoo 2003. VTT Publications 501. 102 s. + liitt. 2 s.

**Avainsanat** finite element method, finite element analysis, calculations, displacement, design, working machines, stability, strength, structural analysis, computer software, models, computer programs

## Tiivistelmä

Tässä työssä laadittiin siirtymäperusteinen elementtimenetelmäohjelmisto, jolla voidaan analysoida työkoneiden rakenteita sekä tehdä myös työkoneiden vakaavuustarkasteluja. Ohjelmistolla voidaan laskea lineaarisen statiikan, lineaarisen stabiilisuusteorian sekä geometrisesti epälineaarisen statiikan tehtäviä. Lisäksi nykyisessä ohjelmaversiossa on epälineaarisen dynamiikan ratkaisija.

Itse ohjelmisto on toteutettu käyttäen perinteisiä ohjelmointikieliä. Mallinnettavan rakenteen parametrinen geometria, kuormitukset, osien massat ja muut lähtöarvotiedot syötetään käyttäen taulukkolaskentakontrollia, joka mahdollistaa räätelöityjen syöttötietojen antamisen. Kolmiulotteinen mallinnus ja työkoneen visualisointi toteutettiin käyttäen kaupallista grafiikkakirjastoa.

Koska lähdekirjallisuudesta ei sellaisenaan löydy työssä käytettyjä elementtejä eikä laskentamenetelmää, on raportissa esitetty laskennassa käytettäviä elementtejä ja menetelmää yleisesti. Elementeistä esitellään sauva-, palkki-, levy-, kuori- ja solidielementtien lisäksi offset-, kytkentä- ja liukujousipalkkielementti. Lisäksi käsitellään lyhyesti hydraulijärjestelmän mallinnusta. Ratkaisualgoritmeista esitellään statiikan, lineaarisen stabiilisuusteorian, dynamiikan sekä hydromekaanisen dynamiikan ratkaisijoiden periaatteet. Koska epälineaarisen dynamiikan laskentamallista syntyvä differentiaaliyhtälöryhmä ratkaistaan ilman algebrallisia sidosehtoja, niin ratkaisualgoritmista on saatu verrattain nopea. Lisäksi hydraulisyilintereiden vaikutukset kokonaisjoustoan saadaan mallinnettua suoraan.

Kehitetty laskentaohjelmisto on otettu suunnittelukäyttöön yhteistyöyrityksissä. Lisäksi ohjelmalla saatavia laskentatuloksia on vertailtu lukuisiin työkoneista mittaamalla saatuihin tuloksiin. Laskentaohjelmaan perehtyneet ovat pitäneet sitä helppokäyttöisenä ja erityisesti samaan tuoteperheeseen kuuluvan työkoneen

laskenta on nopeutunut huomattavasti. Ohjelmiston käytöllä voidaan vähentää laskentaan liittyvää rutiiniväitöä, jolloin laskennan virhemahdollisuudet pienenevät. Edelleen ohjelmalla voidaan tarkastella työkoneen asentoja, joita perinteisessä laskennassa ei ole laskennan raskauden vuoksi tarkasteltu.

Ohjelmiston käytöstä on ollut seurauksena suunnittelutyön laadun parantuminen, suunnittelukustannusten pienentyminen ja laitteiden käyttöturvallisuuden parantuminen. Simulaatiotuloksia on voitu käyttää esimerkiksi käyttölujuustarkastelujen pohjana. Edelleen laskennan tuloksia voidaan käyttää reuna- ja alkuehtoina mallinnettaessa jokin koneen yksityiskohta tarkemmin.

Marjamäki, Heikki. Siirtymäperusteisen elementtimenetelmäohjelmiston suunnittelu ja ohjelmointi [The design and programming of displacement based finite element software]. Espoo 2003. VTT Publications 501. 102 p. + app. 2 p.

**Keywords** finite element method, finite element analysis, calculations, displacement, design, working machines, stability, strength, structural analysis, computer software, models, computer programs

## Abstract

In this research, the use of the finite element analysis in calculation of stability and the strength of working machines was studied. Also a computer software for structural analysis was developed. The strength and stability calculations are based on the two- and three-dimensional non-linear finite element analysis.

The computer aided stability and strength calculation software is especially helpful when designing working machines. Due to its ease of use for end users more calculation cases can be studied. Also, more reliable and accurate calculation results are obtained. The software will, therefore, certainly increase the safety level and efficiency in designing working machines. Additionally, it can be integrated with the internal practices of the design company.

# Alkusanat

Tämän tutkimuksen lähtökohtana oli viime vuosina sattuneet lukuisat työkoneen kaatumisesta tai rakenteen pettämisestä johtuneet työtaturmat. Tutkimuksen oletuksena on, että tapaturmia voidaan tulevaisuudessa vähentää, mikäli työko-nevalmistajilla on käytössään elementtimenettelmään perustuva tietokone-avusteinen laskentaohjelmisto, jolla voidaan monipuolisesti tarkastella ennakoitavissa olevia työkoneen käyttö- ja virhetilanteita.

Tutkimuksen pääasiallinen rahoittaja oli Työsuojelurahasto, ja tutkimustyö toteutettiin VTT:n Tuotteet ja tuotanto -tutkimusyksikössä. Tutkimuksen vastuuhenkilönä toimi VTT:ssa tutkija Heikki Marjamäki ja toteutuksessa mukana olivat tutkimusharjoittelijat Mirve Liius sekä Teemu Nevaharju.

Kiitän rahoittajaa ja kaikkia tutkimuksen toteutukseen osallistuneita henkilöitä pitkämielisyydestä sekä sujuvasta yhteistyöstä. Tahdon tässä vielä lisäksi kiittää TTY:n Teknillisen mekaniikan ja optimoinnin laitoksen henkilökuntaa mielenkiinnosta työtäni kohtaan ja erityisesti tutkija Jari Mäkistä, joka on antanut mekaniikkaa koskevan tietämyksensä hankkeen käyttöön ja usein ohjannut ajatuksiani oikeaan suuntaan.

Lisäksi haluan lausua kiitokseni professori Tapio Salmelle ja professori Markku Tuomalalle niistä arvokkaista neuvoista ja ohjeista koskien tämän kirjoituksen ulkoasua, sisältöä sekä merkintöjä.

Viialassa maaliskuussa 2003

Heikki Marjamäki



# Sisällysluettelo

Tiivistelmä .....	3
Abstract .....	5
Alkusanat .....	6
Symboliluettelo .....	10
1. Johdanto .....	13
1.1 Ohjelmoinnin aloittaminen .....	13
1.2 Työn sisältö .....	14
2. Teoria .....	16
2.1 Linearisointi .....	16
2.2 Virtuaalisen työn periaate .....	17
2.3 Vapausastemittausjärjestelmän muuttaminen .....	17
2.4 Hyperkimmainen materiaali .....	19
2.4.1 Matriisin tai tensorin jäljen linearisointi .....	19
2.4.2 Matriisin determinantin linearisointi .....	20
2.4.3 Käänteismatriisin linearisointi .....	20
2.4.4 Käänteistensorin derivaatta .....	21
2.4.5 Materiaalin kimmoenergiatiheys .....	21
2.4.6 Jännitysten laskenta .....	23
2.4.7 Jännitysten ja muodonmuutosten väliset linearisoidut yhteydet .....	24
3. Elementtien mallinnus .....	27
3.1 Pituuttaan muuttava sauvaelementti .....	27
3.2 Epälineaarinen tasopalkkielementti .....	30
3.3 Offset-palkkielementti .....	33
3.4 Liuku-jousipalkkielementti .....	35
3.5 Kaksoisliuku-jousipalkkielementti .....	38
3.6 Offset-liuku-jousipalkkielementti .....	40
3.7 Offset-kaksoisliuku-jousipalkkielementti .....	41
3.8 KytKentäelementti .....	41
3.9 Avaruuspalkkielementti .....	46

3.9.1	Lineaarinen Euler-Bernoulli-palkkielementti .....	46
3.9.2	Epälineaarinen avaruuspalkkielementti .....	49
3.10	Levyelementti .....	51
3.11	Kuorielementti .....	55
3.12	Tri-lineaarinen solidielementti .....	61
3.13	Kuituvahvisteinen solidielementti .....	67
3.14	Paineen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus .....	70
3.15	Hydraulisyylinterin mallintaminen .....	72
3.16	Hydraulipumpun mallinnus .....	74
3.17	Hydrauliputkiston mallinnus .....	75
4.	Laskentamallin ratkaisu .....	77
4.1	Staattinen analyysi .....	77
4.2	Lineaarinen stabiilisuusanalyysi .....	78
4.3	Laskentamallin dynamiikan ratkaiseminen .....	78
4.4	Hydromekaanisen laskentamallin ratkaiseminen .....	80
5.	Ohjelmointi .....	83
5.1	Työkalut .....	83
5.1.1	Olio-ohjelmointi .....	83
5.1.2	Olio ja luokka .....	84
5.1.3	Abstrakti luokka .....	84
5.1.4	Oliojoukko .....	86
5.2	Geometrian mallinnus .....	86
5.2.1	Pisteet .....	86
5.2.2	Viivat .....	87
5.2.3	Pinnat .....	87
5.2.4	Tilavuudet .....	87
6.	Laskentaesimerkki .....	88
7.	Tulokset .....	90
8.	Verifiointi .....	93
8.1	Verifiointiongelman esitystapa .....	93
8.2	Verifiointiesimerkki .....	94

9. Yhteenveto ..... 98

Lähdeluettelo ..... 100

Liitteet

A: Kolmiulotteisen muuttuvapoikkileikkauksisen palkin jäykkyysmatriisi

B: Kolmiulotteisen muuttuvapoikkileikkauksisen palkin massamatriisi

# Symboliluettelo

## Skalaarisuureet

$A_0$	poikkileikkauksen pinta-ala alkutilassa
$A_s$	poikkileikkauksen tehollinen pinta-ala
$E$	kimmokerroin
$G$	liukumuoduuli
$I$	poikkileikkauksen neliömometti
$I_1, I_2, I_3$	muodonmuutostensorin pääinvariantit
$J$	muodonmuutoskuvauksen Jacobiaani, $J = \det(\mathbf{F})$ , hitausmomentti
$\det \mathbf{J}$	geometrisen kuvauksen Jacobin matriisin determinantti
$K, B$	materiaalin kokoonpuristuvuuskerroin
$N$	poikkileikkauksen normaalivoima
$Q$	tilavuusvirta
$V_0$	tilavuus siirtymättömässä tilassa
$W_1$ ja $W_2$	Mooney-Rivlin materiaaliparametrit
$p$	hydrostaattinen paine
$s$	pituuskoordinaatti
$t$	kerrospaksuus, aika
$\varepsilon$	insinöörivenymä
$\varphi$	kimmoenergiatiheys
$\varphi_d$	kimmoenergiatiheyden muodon vääristymisestä aiheutuva osa
$\varphi_b$	kimmoenergiatiheyden hydrostaattisesta paineesta aiheutuva osa
$\gamma$	liukuma
$\lambda$	kuormituskerroin tai matriisin ominaisarvo
$\rho$	tiheys
$\theta$	kuituvahviteen suuntakulma tai palkkielementin kulma
$\nu$	Poissonin luku
$\sigma_E$	poikkileikkauksen keskimääräinen normaalijännitys
$\xi, \eta, \zeta$	emoelementin koordinaatit

## Matriisi- ja tensorimerkinnät

$\mathbf{e}_i$	ykkösvektori suuntaan $i$
$\mathbf{k}_t$	elementin tangentialinen jäykkyysmatriisi
$\mathbf{u}$	siirtymäkenttä tai solmusiirtymävektori
$\mathbf{u}_e$	elementin solmusiirtymät
$\mathbf{v}$	toinen siirtymäkenttä tai solmunopeusvektori
$\mathbf{f}$	kuvaus kahden normiavaruuden $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ välillä
$\mathbf{B}_{nl}$	venymien ja siirtymien välinen kinemaattinen matriisi
$\mathbf{C}$	oikeanpuolinen Cauchy-Green muodonmuutostensori
$\mathbf{D}_2$	tangentialisen konstitutiivisen tensorin matriisiesitys
$\mathbf{D}_4$	tangentialinen konstitutiivinen neljännen kertaluvun tensori

$\mathbf{E}$	Green-Lagrange muodonmuutostensori
$\mathbf{E}_1$	Green-Lagrange muodonmuutostensorin vektoriesitys
$\mathbf{F}$	deformaatiogradientti
$\mathbf{q}_i, \mathbf{F}_{\text{int}}$	elementin solmuihin vaikuttavat sisäiset voimat
$\mathbf{F}_{\text{cent}}$	elementin solmuihin vaikuttavat nopeudesta riippuvat hitausvoimat
$\mathbf{I}$	identiteettitensori tai identiteettimatriisi
$\mathcal{I}$	neljännen kertaluvun identiteettitensori
$\mathbf{M}$	elementin tai laskentamallin massamatriisi
$\mathbf{S}$	toinen Piola-Kirchhoff jännitystensori, PK2-tensori
$\mathbf{S}_1$	toisen Piola-Kirchhoff jännitystensorin vektoriesitys
$\mathbf{S}_f$	PK2-tensorin komponentit kuitusuunnassa
$\mathbf{X}$	asemavektori alkutilassa
$\mathbf{x}$	asemavektori siirtyneessä tilassa
$\{abc\}$	$[abc]^T$ on pystyvektori

### Operaattorit

$\mathbf{f}$	kuvaus tai funktio vektoriavaruuksien $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ välillä $\mathbf{f}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$
$\delta$	variaatio eli suureen muutos (usein oletetaan pieneksi)
$\Delta$	suureen muutos (ei tarvitse olettaa pieneksi)
$\bullet$	pistetulo
$:$	kaksoiskontraktio eli tensoreiden välinen kaksoispistetulo
$*$	jokin pistetulo, joka määräytyy tehtävän luonteesta
$\tilde{\mathbf{A}}$	vektorista $\mathbf{A}$ muodostettu vinosymmetrinen matriisi
$\otimes$	tensoritulo eli tensoreiden välinen ulkotulo
$\times$	vektoreiden välinen ristitulo
$\ (\bullet)\ $	suureen tai kuvauksen normi
$ (\bullet) $	vektorin normi
$D$	derivointi
$(\bullet)_{,x}$	derivointi muuttujan $x$ suhteen
$\text{tr}$	matriisin jälki (trace)
$\dot{\mathbf{x}}$	suureen $\mathbf{x}$ aikaderivaatta
$\ddot{\mathbf{x}}$	suureen $\mathbf{x}$ toinen aikaderivaatta



# 1. Johdanto

Liikkuvat työkoneet vastaavat Suomen teollisuustuotannon bruttoarvosta noin 3 % ja viennistä 4 %. Alueen kotimainen valmistus on merkittävää, ja se edustaa liikevaihdoltaan noin miljardia euroa vuodessa (Tilastokeskus 1991). Suomessa on käytössä arviomme mukaan nostavia työkoneita noin 200 000 kappaletta, joiden kanssa työskentelee satoja tuhansia työntekijöitä.

Nykyisten työkoneiden rakenne on myös monimutkaistunut, ja tätä kautta vaadittavien lujuus- ja seisontavakavuuslaskelmien määrä- ja laatuvaatimukset ovat kasvaneet.

Työkoneen vakavuus- ja lujuustarkastelut ovat oleellinen osa suunnittelua. Pyrittäessä kevyempiin ja optimaalisempiin rakenteisiin heikentämättä rakenteen kestoikää tai turvallisuutta eivät perinteiset laskentamenetelmät enää riitä, vaan laskelmissa on otettava huomioon myös rakenteen jousto-ominaisuudet. Koska rakenteen jäykkyys muuttuu siirtymäkentän muuttuessa, niin on käytettävä epälineaarista teoriaa. Mikäli tavoitteena on edelleen kytkeä laitteen hydraulijärjestelmä mukaan, on vielä ratkaistava kytketty epälineaarinen ongelma. Tällaisten laskelmien tekemiseen ei ole saatavissa valmisohjelmia.

Tämän työn eräänä tavoitteena oli ratkaista edellä mainitusta laskentamallista syntyvä osittaisdifferentiaaliyhtälöryhmä vapaana ääriarvoongelmana ilman algebrallisia sidosehtoja, jolloin päädytään tavalliseen differentiaaliyhtälöryhmään. Tällä saavutetaan useita etuja, kuten numeerinen stabiilius, suurempi aika-askel ja minimimäärä riippuvia muuttujia.

## 1.1 Ohjelmoinnin aloittaminen

Motivointina ohjelmointityön aloittamiseen oli siis käytössä olevien FEM-ohjelmistojen kykenemättömyys kyseessä oleviin laskentatehtäviin. Toisaalta omalla ohjelmistolla saavutetaan myös se etu, että valmisohjelmien vaatimia lisenssimaksuja ei tarvita.

Ennen ohjelmointiin ryhtymistä olisi syytä tehdä muutamia kysymyksiä, kuten

- miksi tarvitaan uutta FEM-ohjelmistoa
- kuka maksaa ohjelmointi- ja suunnittelutyön
- kuka ohjelmistoa käyttää
- mikä on ohjelman elinkaari
- kuka ylläpitää ohjelmistoa
- voisiko jostain löytyä “halpa” ohjelmisto, jolla voisi ratkaista kyseessä olevat tehtävät.

Lisäksi on syytä miettiä, onko kustannuksissa mukana

- ohjelmiston suunnittelu
- tarvittava koulutus, jotta ohjelmointityö saadaan tehtyä
- ohjelmointityökalujen ja komponenttien valinta
- geometrian mallinnus
- eri elementtien tangenttioperaattoreiden johtaminen
- tehtävän ratkaisijoiden ohjelmointi
- ohjelman antaman tulostiedon suunnittelu
- ohjelmiston vaatima verifiointi
- ohjelmistoon liittyvä verifiointitehtävien kuvaus
- elementtien kuvaus
- ohjelmiston asennuksen ja käyttöönoton suunnittelu
- käyttöohjeet.

## 1.2 Työn sisältö

Työssä esitetään aluksi virtuaalisen työn periaate, jonka pohjalta lujuusopin elementtien johto on tehty. Seuraavaksi on esitetty vapausastemittausjärjestelmän vaihto, jota tarvitaan erilaisten erityiselementtien, kuten offset-palkkielementin yhtälöiden johtamisessa. Esitys on johdettu pääosin itse. Kohdassa linearisointi on esitetty muutamia linearisointeja, joita tarvitaan hyperkimmoisen ainemallin laskennassa. Esitys perustuu lähteeseen [4]. Hyperkimmoisen materiaalin laskennasta on esitetty pääpiirteet perustuen lähteeseen [8].

Erilaisista elementeistä esitellään virtuaalisen työn periaatteella johdettu pituuttaan muuttava sauva. Kaksiulotteinen palkkielementti perustuu Reissnerin kine-



maattiseen malliin [19]. Palkkielementtiä on käytetty pohjana johdattaessa erilaisia erityiselementtejä, kuten offset-palkkielementtiä. Lisäksi on esitetty teleskooppipuomin ketjuvetoa mallintava kytkentäelementti. Erityiselementit on kehittänyt tutkija Jari Mäkinen, TTKK TME. Tässä työssä elementtien lausekkeiden johtaminen on kuitenkin tehty itsenäisesti. Kolmiulotteisesta lineaarisesta palkkielementistä on esitetty muuttuvapoikkileikkauksisen palkin jäykkyys- ja massamatriisi, koska saamieni tietojen mukaan kaikissa valmisohjelmissa ei ole tällaista palkkielementtiä. Kolmiulotteinen geometrisesti epälineaarinen palkkielementti perustuu lähteeseen [9]. Levy- ja solidielementtien johdossa on käytetty apuna lähteitä [2] ja [7]. Kuituvahvisteisen solidielementin yhteydet on johdettu itse. Kuorielementin yhtälöitä johdattaessa on muun aineiston lisäksi käytetty apuna lähteitä [1] ja [22]. Laskentamallin epälineaarisen dynamiikan ratkaisumenetelmien ohjelmoinnissa on käytetty lähteitä [5], [10], [14], [15] ja [16].

## 2. Teoria

Kontinuumimekaniikan epälineaariset ongelmat ratkaistaan lähes poikkeuksetta linearisoimalla epälineaariset yhteydet ja ratkaisemalla iteratiivisesti syntyvät lineaariset yhteydet, kunnes jokin konvergenssikriteeri on täytetty.

### 2.1 Linearisointi

Olkoot  $\mathbf{X}$  ja  $\mathbf{Y}$  täydellisiä normiavaruuksia (Banach-avaruuksia) ja  $\mathbf{f}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  kuvaus näiden avaruuksien välillä. Olkoot edelleen  $\mathbf{S}, \mathbf{U} \in \mathbf{X}$ . Tällöin kuvauksen  $\mathbf{f}$  suunnattu derivaatta pisteessä  $\mathbf{S}$  suuntaan  $\mathbf{U}$  on

$$D(\mathbf{f}(\mathbf{S}))[\mathbf{U}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{S} + \varepsilon \mathbf{U}) - \mathbf{f}(\mathbf{S})}{\varepsilon} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{f}(\mathbf{S} + \varepsilon \mathbf{U}) \quad (1)$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Jos raja-arvo on olemassa kaikilla  $\mathbf{U} \in \mathbf{X}$  ja se on lineaarinen  $\mathbf{U}$ :n suhteen, niin sanotaan kuvauksen  $\mathbf{f}$  olevan Gâteaux-derivoituva pisteessä  $\mathbf{S} \in \mathbf{X}$ . Jos vielä on olemassa sellainen rajoitettu lineaarikuvaus  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  siten, että kaikilla  $\mathbf{U} \in \mathbf{X}$  on voimassa

$$\mathbf{f}(\mathbf{S} + \mathbf{U}) - \mathbf{f}(\mathbf{S}) = \mathbf{A}(\mathbf{S}) * \mathbf{U} + \mathbf{R}(\mathbf{S}, \mathbf{U}) \quad (2)$$

missä jäännöstermi  $\mathbf{R}(\mathbf{S}, \mathbf{U})$  toteuttaa ehdon

$$\lim_{\|\mathbf{U}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{R}(\mathbf{S}, \mathbf{U})\|}{\|\mathbf{U}\|} = 0 \quad (3)$$

niin kuvauksen  $\mathbf{f}$  sanotaan olevan Fréchet-derivoituva tai lyhyesti derivoituva pisteessä  $\mathbf{S}$ . Termiä  $\mathbf{A}(\mathbf{S})$  sanotaan kuvauksen  $\mathbf{f}$  derivaataksi pisteessä  $\mathbf{S}$  ja termiä  $\mathbf{A}(\mathbf{S}) * \mathbf{U}$  kuvauksen linearisoiduksi muodoksi pisteessä  $\mathbf{S}$  suuntaan  $\mathbf{U}$ . Jatkossa linearisoitua muotoa merkitään  $\mathbf{L}(\mathbf{f}; \mathbf{U})$ .

## 2.2 Virtuaalisen työn periaate

Mekaniikan tehtävissä ratkaistavana on tavallisesti ulkoisten kuormitusten vaikutuksesta muotoaan muuttava kappalesysteemi. Perustuntemattomana on tällöin yleensä kappalesysteemin siirtymäkenttä. Tällöin usein käytetty menetelmä tehtävän formuloinnissa on virtuaalisen työn periaate. Virtuaalisen työn lausekkeen

$$\delta W = \delta W_{\text{ext}} - \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{acc}} = 0 \quad (4)$$

termit koostuvat ulkoisten voimien tekemästä virtuaalisesta työstä  $\delta W_{\text{ext}}$ , sisäisten voimien virtuaalisesta työstä  $\delta W_{\text{int}}$  ja hitausvoimien  $\delta W_{\text{acc}}$  virtuaalisesta työstä, missä miinusmerkki on valittu siten, että sisäisten voimien ja hitausvoimien tekemä työ on vastakkaismerkkinen ulkoisten voimien tekemään virtuaaliseen työhön nähden.

Kun elementtimenetelmän mukainen diskretointi, interpolointi ja linearisointi on tehty, saadaan virtuaalisen työn periaatetta soveltamalla johdettua elementtien sisäiset solmuvoimat sekä tangentioperaattorit, kuten jäykkyys- ja massamatriisit. Kinemaattiset rajoitteet voidaan hoitaa helposti, erityisesti, mikäli ne ovat holonomisia eli yhtälötyyppisiä siirtymärajoituksia.

## 2.3 Vapausastemittausjärjestelmän muuttaminen

Kinemaattiset rajoitteet ja vapausastemittausjärjestelmän muuttaminen [21] voidaan hoitaa seuraavaksi esitettävää orjuutustekniikkaa ("isäntä-orja") käyttäen. Perusajatus orjuutustekniikassa on esittää orjasiirtymät, jotka edustavat orjamentin siirtymämuuttujia isäntäsiirtymien avulla [11] ja [18]. Isäntäsiirtymät ovat vapausasteita, jotka syntyvät mallinnettaessa erilaisia kinemaattisia kytkentöjä, kuten joustava translaatioliitos, jonka vapausaste kuvaa liitettyjen elementtien asemaa toisiinsa nähden mitattuna elementin keskiviivaa pitkin.

Olkoon  $\mathbf{f}$  derivoituva kuvaus kahden kytketyn siirtymämittausjärjestelmän  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  välillä:

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) \quad (5)$$

missä  $\mathbf{u}$  on orjasiirtymävektori ja  $\mathbf{v}$  vastaava isäntäsiirtymävektori. Tällöin orjasiirtymän  $\mathbf{u}$  ja isäntäsiirtymän  $\mathbf{v}$  välinen linearisoitu yhteys saadaan

$$\delta \mathbf{u} = D_v \mathbf{f}(\mathbf{v}) \bullet \delta \mathbf{v} = \mathbf{B}(\mathbf{v}) \bullet \delta \mathbf{v} \quad (6)$$

missä  $D_v$  viittaa derivointiin isäntäsiirtymien  $\mathbf{v}$  suhteen. Yhtälö (6) määrittelee kinemaattisen matriisin  $\mathbf{B}(\mathbf{v})$  jonka avulla voidaan määrittää orjasiirtymien variaatiot  $\delta \mathbf{u}$  kun isäntäsiirtymien variaatiot  $\delta \mathbf{v}$  tunnetaan. Oletetaan vielä, että kinemaattisen matriisin  $\mathbf{B}$  rankki on täysi.

Koska molemmissa mittausjärjestelmissä tehty virtuaalinen työ tulee olla yhtä suuri, on vastaavien voimamittausten välillä on yhteys

$$\delta W = \delta \mathbf{u} \bullet \mathbf{F}_u = \delta \mathbf{v} \bullet \mathbf{F}_v \quad (7)$$

ja vastaavien voimamittausten  $\mathbf{F}_v$  ja  $\mathbf{F}_u$  välinen yhteys saadaan sijoittamalla yhteys (6) yhtälöön (7)

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{B}^T \mathbf{F}_u \quad (8)$$

Edellä oleva yhtälö on erityisen tärkeä yhteys isäntä-orjatekniikkaa käytettäessä. Jäykkyysmatriisi mittausjärjestelmässä  $\mathbf{v}$  saadaan linearisoimalla 4 voimamittausten välinen yhteys (8) pisteessä  $\mathbf{v}_0$  tai vastaavassa orja-pisteessä  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{v}_0)$  suuntaan  $\Delta \mathbf{v}$  käyttäen mittausjärjestelmään  $\mathbf{u}$  kuuluvia voimia:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{F}_v; \Delta \mathbf{v}) &= \mathbf{B}^T \mathbf{F}_{u_0} + \mathbf{B}^T D_v(\mathbf{F}_u) \bullet \Delta \mathbf{v} + D_v(\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{F}}_u) \bullet \Delta \mathbf{v} \\ &= \mathbf{F}_{v_0} + \mathbf{B}^T \mathbf{K}_u \mathbf{B} \bullet \Delta \mathbf{v} + \mathbf{K}_g \bullet \Delta \mathbf{v} \end{aligned} \quad (9)$$

Viiva orja-mittauksen  $\mathbf{F}_u$  päällä tarkoittaa, että voimaa pidetään vakiona derivoitaessa jälkimmäistä termiä, eli derivointi kohdistuu kinemaattiseen kytkentään. Yhtälöä (9) pidämme määritelmänä materiaaliselle jäykkyysmatriisille, jonka lauseke nähdään toisesta termistä sekä geometriselle jäykkyysmatriisille  $\mathbf{K}_g$ , jonka lauseke saadaan jälkimmäisestä termistä. Massamatriisin  $\mathbf{M}$  ja hitausvoimien vektorin  $\mathbf{F}_{\text{cent}}$  määrittämiseen tarvitaan hitausvoimien tekemää virtuaalista työtä

$$\delta W_{\text{acc}} = \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{u}}) \quad (10)$$

Derivoimalla yhtälö (5) ajan suhteen saadaan yhteys mittausjärjestelmien nopeuksien ja kiihtyvyyksien välille

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= D_v \mathbf{f}(\mathbf{v}) \cdot \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{B} \dot{\mathbf{v}} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{B} \ddot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (11)$$

Sijoittamalla yhtälö (11) yhtälöön (10) saadaan hitausvoimien virtuaalinen työ mittausjärjestelmässä  $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{acc}} &= \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{M}_u (\mathbf{B} \ddot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{v}}) \\ &= \delta \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B}^T \mathbf{M}_u \mathbf{B} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{B}^T \mathbf{M}_u \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{v}}) \end{aligned} \quad (12)$$

Massamatriisi ja hitausvoimien aiheuttama solmuvoimavektori mittausjärjestelmässä  $\mathbf{v}$  saadaan mittausjärjestelmän  $\mathbf{u}$  vastaavien suureiden avulla

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_v &= \mathbf{B}^T \mathbf{M}_u \mathbf{B} \\ \mathbf{F}_{\text{cent}} &= \mathbf{B}^T \mathbf{M}_u \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (13)$$

On syytä huomata, että mikäli kinemaattinen matriisi  $\mathbf{B}$  muuttuu siirtymien  $\mathbf{v}$  funktiona, niin myös massamatriisi muuttuu siirtymien funktiona.

## 2.4 Hyperkimmoinen materiaali

Seuraavassa esitetään muutama esimerkki suuntaan  $\mathbf{U}$  linearisoiduista yhteyksistä, joita tarvitaan hyperkimmoinen ainemallin analysoinnissa elementtimenetelmällä.

### 2.4.1 Matriisin tai tensorin jäljen linearisointi

$$D \text{tr}(\mathbf{S})[\mathbf{U}] = \left. \frac{d}{d \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0} \{ \text{tr}(\mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{U}) \} = \text{tr}(\mathbf{U}) = \mathbf{I} : \mathbf{U} \quad (14)$$

### 2.4.2 Matriisin determinantin linearisointi

$$\begin{aligned}
 D \det(\mathbf{S})[\mathbf{U}] &= \left. \frac{d}{d \varepsilon} \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} \det(\mathbf{S} + \varepsilon \mathbf{U}) = \left. \frac{d}{d \varepsilon} \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} \det\{\mathbf{S}(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U})\} \\
 &= \det(\mathbf{S}) \left. \frac{d}{d \varepsilon} \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} \det(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U})
 \end{aligned} \tag{15}$$

Ottamalla käyttöön (mielivaltaisen) matriisin  $\mathbf{A}$  ominaisarvoista  $\lambda_i$  muodostettu karakteristisen polynomin lauseke (16) ja sijoittamalla siihen skalaariksi,  $\lambda = -1$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1^A - \lambda)(\lambda_2^A - \lambda)(\lambda_3^A - \lambda) \tag{16}$$

saadaan lausekkeesta (15)

$$D \det(\mathbf{S})[\mathbf{U}] = \det(\mathbf{S}) \left. \frac{d}{d \varepsilon} \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon \lambda_1^{S^{-1}U})(1 + \varepsilon \lambda_2^{S^{-1}U})(1 + \varepsilon \lambda_3^{S^{-1}U}) \tag{17}$$

ja suorittamalla derivointi saadaan linearisoitu muoto

$$\begin{aligned}
 D \det(\mathbf{S})[\mathbf{U}] &= \det \mathbf{S} (\lambda_1^{S^{-1}U} + \lambda_2^{S^{-1}U} + \lambda_3^{S^{-1}U}) \\
 &= \det(\mathbf{S}) \operatorname{tr}(\mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}) \\
 &= \det(\mathbf{S}) (\mathbf{S}^{-T} : \mathbf{U})
 \end{aligned} \tag{18}$$

### 2.4.3 Käänteismatriisin linearisointi

Koska neliömatriisin ja sen käänteismatriisin tulo on identiteettimatriisi  $\mathbf{I}$ , niin

$$D(\mathbf{S}^{-1} \mathbf{S})[\mathbf{U}] = D(\mathbf{I})[\mathbf{U}] = \mathbf{0} \tag{19}$$

soveltamalla yhtälöön (19) tulon linearisointisääntöä saadaan

$$D(\mathbf{S}^{-1})[\mathbf{U}]\mathbf{S} + \mathbf{S}^{-1}D(\mathbf{S})[\mathbf{U}] = 0 \quad (20)$$

josta helposti saadaan käänteismatriisille

$$D(\mathbf{S}^{-1})[\mathbf{U}] = -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{S}^{-1} \quad (21)$$

#### 2.4.4 Käänteistensorin derivaatta

Lähdetään tensorin  $\mathbf{C}$  ja sen käänteistensorin  $\mathbf{C}^{-1}$  pistetulosta

$$\mathbf{C} \bullet \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I} \quad (22)$$

Derivoidaan yhteys  $\mathbf{C}$ :n suhteen saadaan

$$\mathbf{C}_{,c} \bullet \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C} \bullet \mathbf{C}_{,c}^{-1} = \mathbf{0} \quad (23)$$

Kerrotaan yhtälö vasemmalta käänteistensorilla ja sievennetään, jolloin saadaan

$$\mathbf{C}^{-1} \bullet \mathbf{C}_{,c} \bullet \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}_{,c}^{-1} = \mathbf{0} \quad (24)$$

Tästä ratkaisemalla käänteistensorin derivaataksi

$$\mathbf{C}_{,c}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \bullet \mathcal{I} \bullet \mathbf{C}^{-1} \quad (25)$$

#### 2.4.5 Materiaalin kimmoenergiatiheys

Hyperkimmoisen materiaalin kimmoenergiatiheys voidaan lausua oikeanpuoleisen Cauchy-Green muodonmuutostensorin  $\mathbf{C}$  pääinvarianttien  $I_1$ ,  $I_2$  ja  $I_3$  avulla. Muodonmuutostensori saadaan

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (26)$$

missä deformaatiogradientti

$$\mathbf{F} = \frac{d \mathbf{x}}{d \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{d \mathbf{u}}{d \mathbf{X}} \quad (27)$$

Pääinvarianttien lausekkeet ovat:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}) \\ I_2 &= \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)) \\ &= C_{11}C_{22} + C_{22}C_{33} + C_{33}C_{11} - C_{12}C_{21} - C_{23}C_{32} - C_{13}C_{31} \\ I_3 &= J^2 = \det(\mathbf{C}) \end{aligned} \quad (28)$$

Erlaisia kimmoenergiatiheyden lausekkeita on useita [8], joista tähän esitykseen on valittu *Mooney-Rivlin* materiaalimalli. Käytetty materiaalimalli soveltuu insinöörivenymille, jotka ovat pienempiä kuin noin 100 %. Materiaalimallin kimmoenergiatiheys on muotoa

$$\varphi = \varphi_d + \varphi_b = W_1(\bar{I}_1 - 3) + W_2(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{2} K (J - 1)^2 \quad (29)$$

Kimmoenergiatiheyden lausekkeessa (29) kahdessa ensimmäisessä termissä ( $\varphi_d$ ) käytetään modifioituja pääinvariantteja

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= I_1 I_3^{-1/3} \\ \bar{I}_2 &= I_2 I_3^{-2/3} \end{aligned} \quad (30)$$

jotka eivät huomioi materiaalin kokoonpuristuvuutta, vaan ainoastaan muodon vääristymistä. Kokoonpuristuvuus huomioidaan viimeisessä termissä, jossa kerroin  $K$  on materiaalin kokoonpuristuvuuskerroin. Mainittakoon vielä, että *Mooney-Rivlin* materiaalimallista saa niin kutsutun *Neo-Hookean* materiaalimallin asettamalla materiaalivakion  $W_2 = 0$ . Tämä materiaalimalli soveltuu venymille, jotka ovat pienempiä kuin noin 30 %.



## 2.4.6 Jännitysten laskenta

Käytettäessä suurten venymien teoriaa tulee käytettyjen jännitys- ja venymämittausten olla työkonjugaatteja. Tässä esityksessä käytetään Green-Lagrangen venymätensoria

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (31)$$

ja toista Piola-Kirchhoffin jännitystensoria  $\mathbf{S}$ , jotka ovat toistensa työkonjugaatteja. Materiaalin jännitystensori saadaan derivoimalla kimmoenergiatiheyden lauseke (29)

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left( A_1 \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + A_2 \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + A_3 \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (32)$$

missä

$$\begin{aligned} A_1 &= W_1 I_3^{-1/3} \\ A_2 &= W_2 I_3^{-2/3} \\ A_3 &= -\frac{1}{3} W_1 I_3^{-4/3} I_1 - \frac{2}{3} W_2 I_3^{-5/3} I_2 + K \frac{J-1}{2J} \end{aligned} \quad (33)$$

Pääinvarianttien variaatiot saadaan soveltamalla kohdassa *linearisointi* esitettyjä yhteyksiä

$$\begin{aligned} \delta I_1 &= \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} = \mathbf{I} : \delta \mathbf{C} \\ \delta I_2 &= \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} = (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) : \delta \mathbf{C} \\ \delta I_3 &= \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} = I_3 \mathbf{C}^{-1} : \delta \mathbf{C} \end{aligned} \quad (34)$$

Käyttämällä hydrostaattiselle paineelle yhteyttä

$$p = -K(J-1) \quad (35)$$

saadaan jännitystensorin lausekkeeksi

$$\mathbf{S} = B_1 \mathbf{I} + B_2 \mathbf{C} + B_3 \mathbf{C}^{-1} - p I_3^{1/2} \mathbf{C}^{-1} = \frac{\partial \varphi_d}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \varphi_b}{\partial \mathbf{E}} \quad (36)$$

missä

$$\begin{aligned} B_1 &= 2W_1 I_3^{-1/3} + 2W_2 I_3^{-2/3} I_1 \\ B_2 &= -2W_2 I_3^{-2/3} \\ B_3 &= -\frac{2}{3} W_1 I_3^{-1/3} I_1 - \frac{4}{3} W_2 I_3^{-2/3} I_2 \end{aligned} \quad (37)$$

#### 2.4.7 Jännitysten ja muodonmuutosten väliset linearisoidut yhteydet

Laskettaessa elementtien jäykkymatriiseja tulee olla käytössä muodonmuutoksen  $\mathbf{C}$ , tai itse asiassa venymäkentän  $\mathbf{E}$  arvolla linearisoitu jännitysten ja muodonmuutosten välinen yhteys

$$\delta \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{C}, p)}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{C}, p)}{\partial p} \delta p = \mathbf{D}_4 : \delta \mathbf{E} + \mathbf{G} \delta p \quad (38)$$

Derivoimalla jännitystensorin  $\mathbf{S}$  lauseketta (36) saadaan:

Termi  $B_1 \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \otimes \frac{\partial B_1}{\partial \mathbf{C}} &= -\frac{2}{3} W_1 I_3^{-1/3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \frac{4}{3} W_2 I_3^{-2/3} I_1 \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2W_2 I_3^{-2/3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \\ &= \left( -\frac{2}{3} W_1 I_3^{-1/3} - \frac{4}{3} W_2 I_3^{-2/3} I_1 \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} + (2W_2 I_3^{-2/3}) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{aligned} \quad (39)$$

Termi  $B_2 \mathbf{C}$

$$\mathbf{C} \otimes \frac{\partial B_2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{4}{3} W_2 I_3^{-2/3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \quad (40)$$

$$B_2 \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} = -2W_2 I_3^{-2/3} \mathcal{I}$$

Termi  $B_3 \mathbf{C}^{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_3}{\partial \mathbf{C}} &= -\frac{2}{3} W_1 \left( -\frac{1}{3} I_3^{-1/3} I_1 \mathbf{C}^{-1} + I_3^{-1/3} \mathbf{I} \right) - \frac{4}{3} W_2 \left( -\frac{2}{3} I_3^{-2/3} I_2 \mathbf{C}^{-1} + I_3^{-2/3} I_1 \mathbf{I} - I_3^{-2/3} \mathbf{C} \right) \\ &= \left( \frac{2}{9} W_1 I_3^{-1/3} I_1 \mathbf{C}^{-1} - \frac{2}{3} W_1 I_3^{-1/3} \mathbf{I} + \frac{8}{9} W_2 I_3^{-2/3} I_2 \mathbf{C}^{-1} - \frac{4}{3} W_2 I_3^{-2/3} I_1 \mathbf{I} + \frac{4}{3} W_2 I_3^{-2/3} \mathbf{C} \right) \\ &= \left( \frac{2}{9} W_1 I_3^{-1/3} I_1 + \frac{8}{9} W_2 I_3^{-2/3} I_2 \right) \mathbf{C}^{-1} + \left( \frac{4}{3} W_2 I_3^{-2/3} \right) \mathbf{C} + \left( -\frac{2}{3} W_1 I_3^{-1/3} - \frac{4}{3} W_2 I_3^{-2/3} I_1 \right) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (41)$$

eli

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{-1} \otimes \frac{\partial B_3}{\partial \mathbf{C}} &= \left( \frac{2}{9} W_1 I_3^{-1/3} I_1 + \frac{8}{9} W_2 I_3^{-2/3} I_2 \right) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \left( \frac{4}{3} W_2 I_3^{-2/3} \right) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \\ &\quad + \left( -\frac{2}{3} W_1 I_3^{-1/3} - \frac{4}{3} W_2 I_3^{-2/3} I_1 \right) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} \end{aligned} \quad (42)$$

ja

$$B_3 \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} = \left( \frac{2}{3} W_1 I_3^{-1/3} I_1 + \frac{4}{3} W_2 I_3^{-2/3} I_2 \right) \mathbf{C}^{-1} \bullet \mathcal{I} \bullet \mathbf{C}^{-1} \quad (43)$$

Painetermi

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{-1} \otimes \frac{\partial(-pI_3^{1/2})}{\partial \mathbf{C}} &= -\frac{1}{2} p I_3^{1/2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \\
(-pI_3^{1/2}) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} &= p I_3^{1/2} \mathbf{C}^{-1} \bullet \mathcal{I} \bullet \mathbf{C}^{-1} \\
\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial p} &= -I_3^{1/2} \mathbf{C}^{-1}
\end{aligned} \tag{44}$$

Kokoamalla edellä lasketut termit saadaan neljännen kertaluvun konstitutiiviselle tensorille ortonormeeratussa kannassa komponenttiesitys

$$\begin{aligned}
D_{ijkl} &= F_1 C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + F_2 (\delta_{ij} C_{kl}^{-1} + C_{ij}^{-1} \delta_{kl}) \\
&\quad + F_3 (C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{jk}^{-1}) + F_4 \delta_{ij} \delta_{kl} \\
&\quad + F_5 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + F_6 (C_{ij} C_{kl}^{-1} + C_{ij}^{-1} C_{kl})
\end{aligned} \tag{45}$$

missä

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{4}{9} W_1 I_3^{-1/3} I_1 + \frac{16}{9} W_2 I_3^{-2/3} I_2 - p I_3^{1/2} \\
F_2 &= -\frac{4}{3} W_1 I_3^{-1/3} - \frac{8}{3} W_2 I_3^{-2/3} I_1 \\
F_3 &= \frac{2}{3} W_1 I_3^{-1/3} I_1 + \frac{4}{3} W_2 I_3^{-2/3} I_2 + p I_3^{1/2} \\
F_4 &= 4W_2 I_3^{-2/3} \\
F_5 &= -2W_2 I_3^{-2/3} \\
F_6 &= \frac{8}{3} W_2 I_3^{-1/3}
\end{aligned} \tag{46}$$

Vastaava indeksiesitys painetermille on muotoa

$$G_{ij} = -J C_{ij}^{-1} \tag{47}$$

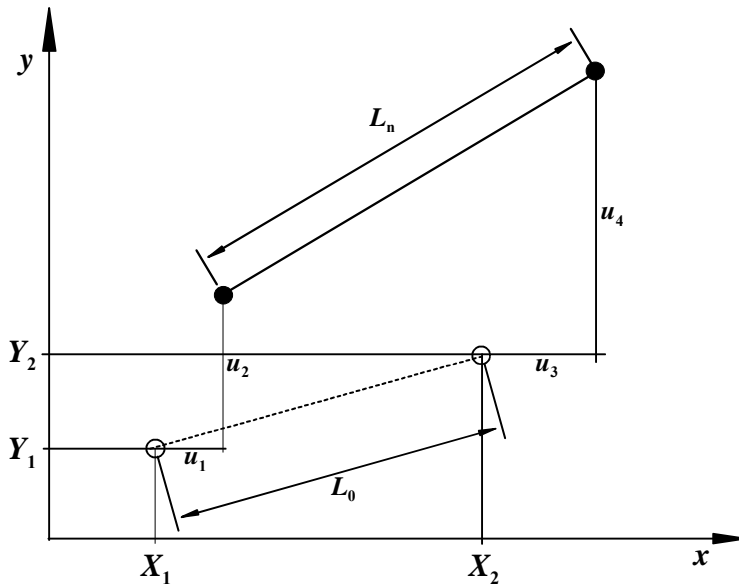
Saatu tulos on sama kuin lähteessä [8], vaikka välimuodot eivät ole yhtenevät. Lähteen välimuodoissa on kuitenkin virheitä.

### 3. Elementtien mallinnus

Tässä luvussa esitetään eräiden rakenne-elementtien sisäisten voimien, tangenttijäykkyyden sekä massamatriisin lausekkeita. Esitettävien elementtien valinta perustuu lähinnä siihen, että lausekkeita ei välttämättä löydy lähdekirjallisuudesta. Toisaalta lausekkeiden johtaminen on hyvin työlästä ja virhealtista.

#### 3.1 Pituuttaan muuttava sauvaelementti

Kuvassa 1 on esitetty pituuttaan muuttava ja kääntyvä sauvaelementti, joka on mahdollisimman yksinkertainen elementti hydraulisylinterin toiminnan mallintamiseen. Elementin kinematiikka perustuu insinöörivenymän käyttöön. Edelleen sauvan jännitysten ja venymien välisen yhteyden oletetaan noudattavan Hooken lakia. Sauvan kuormittamaton pituus  $L_0$  muuttuu ajan funktiona. Sauvan vastaava deformoitunut pituus on  $L_n$ .



Kuva 1. Pituuttaan muuttavan sauvaelementin alkutila (katkoviiva) ja deformoitunut tila (yhtenäinen viiva).

Sauvan alkutilan deformaatonta tilaa mitataan asemavektorilla  $\mathbf{X} = \{X_1, Y_1, X_2, Y_2\}$  ja deformaatiota solmusiirtymävektorilla  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  kuvan 1 mukaisesti. Sauvan jännityksetön pituus ajan hetkellä  $t$  saadaan yhteydestä

$$L_c = L_0 + L(t) \quad (48)$$

missä  $L_0$  sauvan pituus alkutilassa ja  $L(t)$  pituuden muutos, joka siis on ajan funktio. Sauvan pituuden neliö deformaatuneessa tilassa on

$$L_n^2 = (\mathbf{X} + \mathbf{u})^T \mathbf{A} (\mathbf{X} + \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} . \quad (49)$$

missä symmetrinen matriisi  $\mathbf{A}$  on

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

ja  $\mathbf{x}$  on deformaatuneen tilan asemavektori. Sauvan jäykän kappaleen liikkeestä riippumaton insinöörivenymä määritellään elementille

$$\varepsilon = \frac{L_n}{L_c} - 1 = \frac{L_n^2 - L_c^2}{L_c(L_c + L_n)} \quad (51)$$

missä jälkimmäinen muoto on numeerisessa laskennassa stabiilimpi. Sauvan sisäisten solmuvoimien vektorin johtamiseksi tarvitaan sauvan venymän ensimmäinen variaatio

$$\delta\varepsilon = \frac{\delta L_n}{L_c} = \frac{1}{L_c L_n} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \delta\mathbf{u} = \mathbf{B} \delta\mathbf{u} \quad (52)$$

missä  $\mathbf{B}$  on kinemaattinen matriisi virtuaalisten siirtymien  $\delta\mathbf{u}$  ja virtuaalisten venymien  $\delta\varepsilon$  välillä. Summaamalla sauvan normaalijännitysten  $\sigma_E$  tekemä vir-

tuaalinen työ elementin tilavuuden  $V_c$  yli saadaan sauvaelementin sisäisten solmuvoimien vektori

$$\mathbf{q}_{\text{int}} = \int_{V_c} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_E dV_c = \frac{A_0 \boldsymbol{\sigma}_E}{L_n} \mathbf{A} (\mathbf{X} + \mathbf{u}) = \frac{A_0 E \boldsymbol{\varepsilon}}{L_n} \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (53)$$

missä  $A_0$  on sauvan alkuperäinen poikkileikkauksen pinta-ala,  $E$  on kimmomoduuli. Sauvan tangenciaalisen jäykkyyssmatriisin lauseketta varten tulee sisäisten voimien lauseke linearisoida suuntaan  $\Delta \mathbf{u}$  ja  $\Delta t$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{q}_{\text{int}}; \Delta \mathbf{u}, \Delta t) &= \mathbf{q}_{\text{int}0} + \left( \frac{A_0 \boldsymbol{\sigma}_E}{L_n} \mathbf{A} + \left( \frac{EA_0}{L_n^2 L_c} - \frac{A_0 \boldsymbol{\sigma}_E}{L_n^3} \right) \mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \right) \bullet \Delta \mathbf{u} - \frac{EA_0 \dot{L}}{L_c^2} \mathbf{A} \mathbf{x} \bullet \Delta t \\ &= \mathbf{q}_{\text{int}0} + \mathbf{k}_t \bullet \Delta \mathbf{u} + \dot{\mathbf{q}}_{\text{int}} \bullet \Delta t \end{aligned} \quad (54)$$

missä  $\mathbf{k}_t$  on tangenciaalinen jäykkyyssmatriisi. Yhtälössä (54) jälkimmäistä termiä voidaan käyttää dynamiikan tehtävän aikaintegroinnissa.

Massamatriisin johtamiseksi hitausvoimien tekemä virtuaalinen työ integroidaan elementin alueen yli

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{acc}} &= \int_{V_c} \delta(\mathbf{N} \mathbf{u}) \bullet \rho(\mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}) dV_c = \delta \mathbf{u} \bullet \int_{V_c} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV_c \ddot{\mathbf{u}} \\ &= \delta \mathbf{u} \bullet (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (55)$$

missä  $\mathbf{N}$  elementin muotofunktioista muodostettu matriisi.

Olettamalla sauvaelementti tasapaksuksi ja homogeeniseksi sekä käyttämällä lineaarisia muotofunktioita saadaan elementin massamatriisiksi

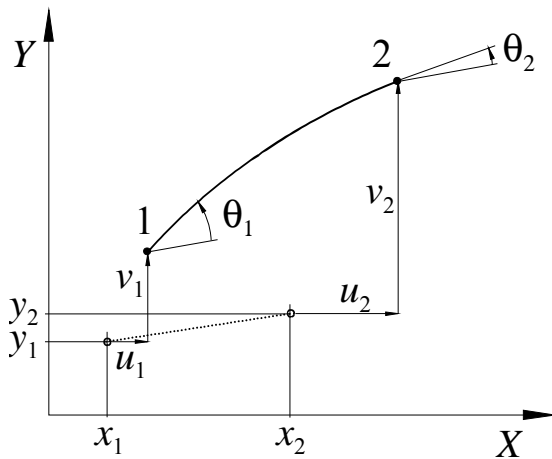
$$\mathbf{M} = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

missä  $m$  on elementin massa.

Vastaava kolmiulotteisen avaruuden elementti saadaan suoraan lisäämällä elementin mittauksiin Z-akselin suuntaiset komponentit ja tekemällä tarvittavat muutokset matriisiin  $\mathbf{A}$ , yhtälö (50).

### 3.2 Epälineaarinen tasopalkkielementti

Epälineaarisisissa palkkielementeissä käytetään tässä työssä Reissnerin kinemaattisesti tarkkaa palkkiteoriaa, missä siirtymäkenttä mitataan kiinteään koordinaatistoon nähden. Kuvassa 2 on esitetty palkkielementin neutraaliakseli alkuasemassa ja siirtyneessä tilassa



Kuva 2. Tasopalkkielementin alkuasema (katkoviiva) ja siirtynyt tila (yhtenäinen viiva).

Kiinteätä koordinaatistoa käyttäen saadaan yksinkertaisempi muoto palkin kiineettiselle energialle [3]. Tällä palkkielementillä on yksinkertaiset muotofunktiot, koska siirtymä- ja rotaatiovapausasteet ovat toisistaan riippumattomia. Tämä ominaisuus helpottaa muun muassa translaatioliitosten mallinnusta antaen sisäisten solmuvoimien vektorille ja tangentialiselle jäykkymatriisille verrat-



tain yksinkertaiset lausekkeet. Lisäksi elementti ottaa huomioon leikkausmuodonmuutoksen, joka voi olla merkittävä korkeaprofiilisilla palkkirakenteilla.

Palkkielementti perustuu suurten venymien teoriaan, katso [19] ja [20] ja sillä on kolme solmuvapausastetta, kaksi siirtymävapausastetta ja yksi rotaati vapausaste. Yksinkertaisuuden vuoksi tässä työssä rajoitetaan vain palkkielementtiin, jolla on kaksi solmua ja lineaariset muotofunktiot. Palkin sisäinen solmuvoimavektori on

$$\mathbf{q}_{\text{int}} = \int_{L_0} \mathbf{B}^T \mathbf{S} dL_0 \quad (57)$$

missä kinemaattinen matriisi  $\mathbf{B}$  on

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} c N'_1 & s N'_1 & \gamma N_1 & c N'_2 & s N'_2 & \gamma N_2 \\ -s N'_1 & c N'_1 & -N_1 & -s N'_2 & c N'_2 & -N_2 \\ 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & N'_2 \end{bmatrix}$$

$$c = \cos \theta, s = \sin \theta \quad (58)$$

$$(\bullet)' = \frac{d}{dL_0}$$

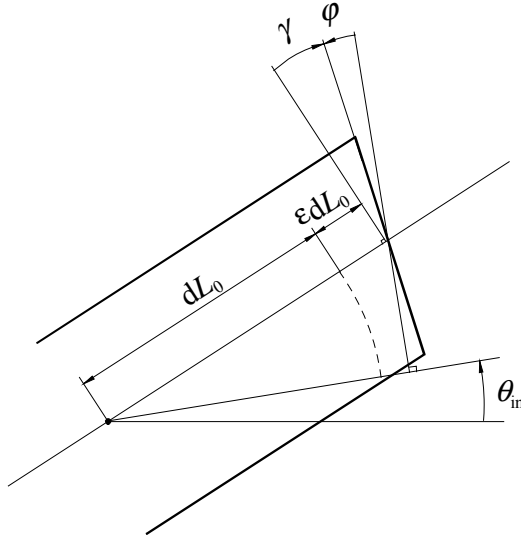
ja poikkileikkauksen jännitysresultanttivektorilla  $\mathbf{S}$  tarkoitetaan vektoria

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA_s & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} = \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (59)$$

missä  $\varepsilon$  on aksiaalinen venymä,  $\gamma$  on liukuma ja  $\kappa$  on kimmoviivan kaarevuus. Ne määritellään kaavoilla

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X' + u') \cos \theta + (Y' + v') \sin \theta - 1 \\ (Y' + v') \cos \theta - (X' + u') \sin \theta \\ \varphi' \end{bmatrix} \quad (60)$$

missä  $u$  ja  $v$  ovat siirtymät  $X$ - ja  $Y$ -suuntiin. Kulma  $\theta = \theta_{\text{in}} + \varphi$  missä  $\theta_{\text{in}}$  on elementin kulma  $X$ -akselin suhteen alkutilassa ja  $\varphi$  on rotaatio alkutilasta mitattuna, katso kuva 3. Palkin kimmomatriisi  $\mathbf{D}_2$  yhtälössä (59) koostuu aksiaali-jäykkyydestä,  $EA$ , leikkausjäykkyydestä,  $GA_s$  ja taivutusjäykkyydestä  $EI$ .



Kuva 3. Palkkielementin poikkileikkauksen deformaatio.

Palkkielementin tangentiaalinen jäykkyydsmatriisi saadaan linearisoimalla sisäisten solmuvoimien vektori suuntaan  $\Delta \mathbf{u}$ :

$$\mathbf{k}_t = \int_{L_0} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B} dL_0 + \int_{L_0} D_u (\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{S}}) dL_0 \quad (61)$$

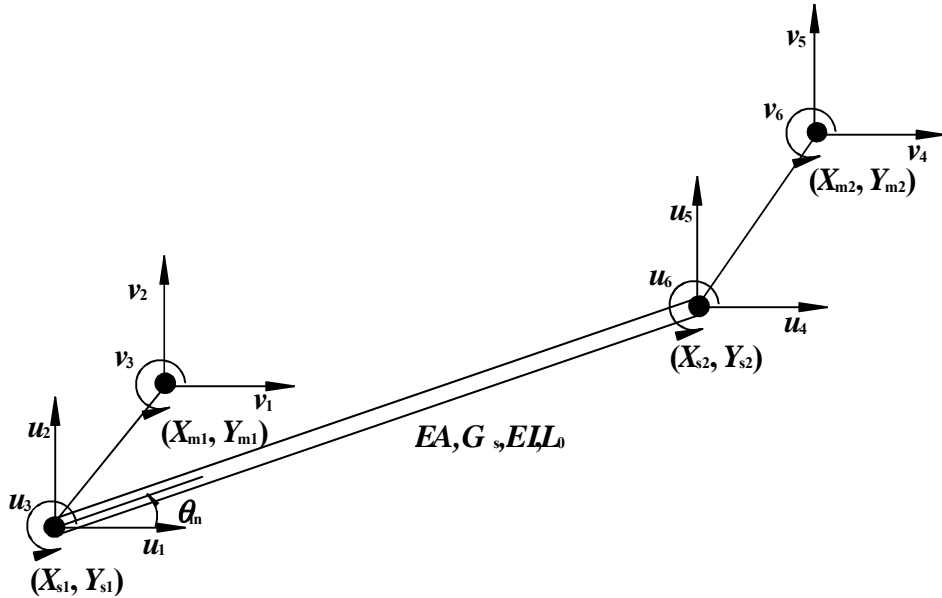
Jäykkyydsmatriisin lauseke suljetussa muodossa yksityiskohtaisine johtoineen löytyy esimerkiksi lähteestä [19]. Olettaen taas, että palkkielementti on tasapaksu ja homogeeninen, sen massamatriisi saadaan käyttäen yhtälöä (55).

$$\mathbf{M} = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i^2 & 0 & 0 & i^2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 & 0 & 0 & 2i^2 \end{bmatrix} \quad (62)$$

missä  $m$  on palkin kokonaismassa ja  $i$  on palkin poikkileikkauksen neliösäde.

### 3.3 Offset-palkkielementti

Offset-palkkielementtejä voidaan käyttää esimerkiksi mallinnettaessa palkkirakennetta, jossa on rotaationivel, joka ei sijaitse palkin pintakeskiössä. Ensinnäkin laskentamallin vapausasteiden määrä vähenee nopeuttaen näin systeemiyh-tälöiden ratkaisuaikaa ja toisaalta laskentamallissa ei tarvita topologiaa muutok-sia elementtiverkossa, vaikka rotaationiveliä siirretään palkin keskilinjasta si-vuun. Offset-elementillä tarkoitetaan tässä elementtiä, jossa solmut eivät sijaitse palkin neutraaliakselilla. Kuvassa 4 tällainen elementti on esitetty isäntä- ja orja-vapausasteineen. Alaindeksit  $m$  (master) viittaavat solmuihin, joiden siirtymät  $\mathbf{v}$  ovat mukana laskentamallissa ja alaindeksi  $s$  (slave) viittaavat kuviteltuihin sol-muihin elementin neutraaliakselilla. Kuviteltujen solmujen siirtymät on koottu vektoriin  $\mathbf{u}$ . Siirtymien  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  välillä oletetaan olevan jäykkä kytkentä.



Kuva 4. Offset-palkkielementti ja sen vapausasteet isäntä- ja orjamittausjärjestelmässä.

Ensimmäisen solmun isäntä- ja orjasolmun siirtymien ja virtuaalisten siirtymien välillä on kinemaattinen yhteys

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{s1} &= \mathbf{x}_{m1} + \mathbf{R}(v_3) \mathbf{X}_{s1/m1} \\ \delta \mathbf{x}_{s1} &= \delta \mathbf{x}_{m1} + \delta \mathbf{R}(v_3) \mathbf{X}_{s1/m1} \end{aligned} \quad (63)$$

missä  $\mathbf{X}_{s1/m1}$  on offset-vektori elementin siirtymättömässä tilassa, joka saadaan  $\mathbf{X}_{s1/m1} = \mathbf{X}_{s1} - \mathbf{X}_{m1}$ . Rotaatiomatriisi  $\mathbf{R}$  ja sen variaatio saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \cos v_3 & -\sin v_3 \\ \sin v_3 & \cos v_3 \end{bmatrix} \\ \delta \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} -\sin v_3 & -\cos v_3 \\ \cos v_3 & -\sin v_3 \end{bmatrix} \delta v_3 \end{aligned} \quad (64)$$

Vastaavat yhteydet ovat voimassa myös toiselle solmulle. Yhdistämällä alku- ja loppusolmun siirtymien väliset yhteydet ja lisäämällä rotaatiiovapausasteet saadaan kinemaattinen matriisi  $\mathbf{B}$  isäntä- ja orjasolmuniirytymien välillä

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -X_{s1/m1} \sin v_3 - Y_{s1/m1} \cos v_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X_{s1/m1} \cos v_3 - Y_{s1/m1} \sin v_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -X_{s2/m2} \sin v_6 - Y_{s2/m2} \cos v_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_{s2/m2} \cos v_6 - Y_{s2/m2} \sin v_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

missä  $X_{s1/m1}$  ja  $Y_{s1/m1}$  ovat vektorin  $\mathbf{X}_{s1/m1}$  komponentteja. Geometrisen jäykkyyss-matriisin muodostamista varten tarvitaan yhtälöä

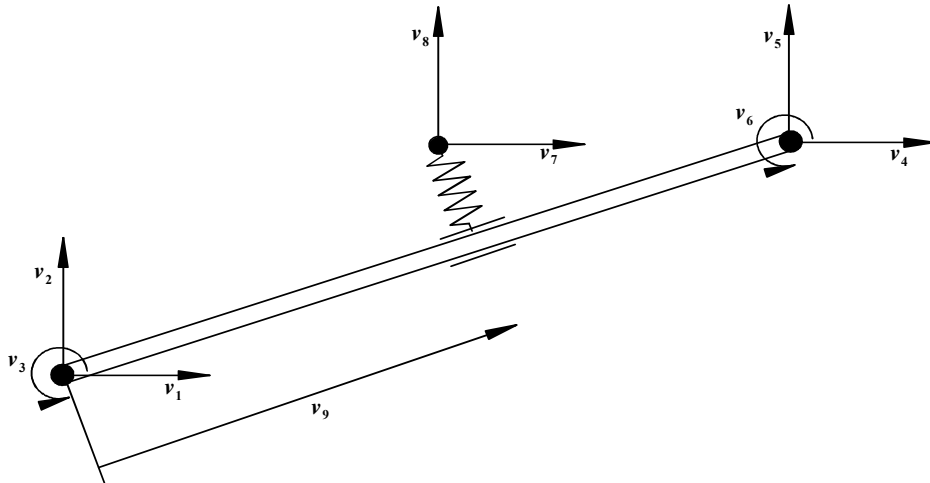
$$D_v(\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{F}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_2 B_{13} + F_1 B_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_5 B_{46} + F_4 B_{56} \end{bmatrix} \quad (66)$$

missä  $F_i$  termit viittaavat orjaelementin sisäisten solmuvoimien vektorin komponentteihin ja termit  $B_{ij}$  kinemaattisen matriisin  $\mathbf{B}$  alkioihin. Elementin sisäisten solmuvoimien vektori saadaan yhtälöä (8) käyttäen ja tangentialinen jäykkyyss-matriisi yhtälöstä (9). Massamatriisi ja hitausvoimien vektori saadaan yhtälöstä (13).

### 3.4 Liuku-jousipalkkielementti

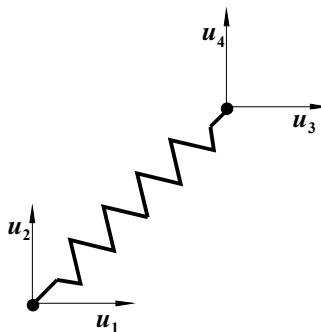
Seuraavaksi esiteltävä elementti koostuu edellä esitetystä palkkielementistä, johon on liitetty liukujousi. Jousi pääsee liukumaan vapaasti palkin neutraaliakselia pitkin. Elementillä pyritään mallintamaan joustavaa johdeliitosta [6]. Lii-

toksen joustavuus määräytyy jousielementin joustavuuden perusteella. Elementin solmuvapausasteet  $v$  nähdään kuvassa 5.



Kuva 5. Liuku-jousipalkkielementti ja sen vapausasteet.

Palkkielementtiin on lisätty kuvan 6 mukainen jousi, joka pääsee liukumaan palkin neutraaliakselia pitkin. Yleistetty vapausaste  $v_9$ , joka kuvaa jousen alkusolmun relativista asemaa, on verrannollinen palkkielementin pituuteen ja voi saada arvoja välillä  $[0,1]$ . Jousielementin lokaalivapausasteita mitataan vektorilla  $\mathbf{u}_S$  ja jousen lokaalivapausasteisiin liittyvä sisäisten solmuvoimien vektori on  $\mathbf{q}_{\text{intS}}$ .



Kuva 6. Jousielementti ja sen lokaalivapausasteet.

Orjaelementtinä toimivan jousielementin lokaalisiirtymien  $\mathbf{u}_S$  ja isäntäelementtinä toimivan liuku-jousipalkkielementin siirtymien  $\mathbf{v}$  välillä on kytkentäyhtälö

$$\mathbf{u}_S = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-v_9)(X_1+v_1)+v_9(X_2+v_4)-(1-v_{90})X_1-v_{90}X_2 \\ (1-v_9)(Y_1+v_2)+v_9(Y_2+v_5)-(1-v_{90})Y_1-v_{90}Y_2 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) \quad (67)$$

missä  $v_{90}$  määrittää liu'un alkuaseman. Kinemaattinen matriisi  $\mathbf{B}_S$  jousen lokaalisiirtymien ja isäntäelementin siirtymien välillä saadaan varioimalla kytkentäyhtälöä  $\mathbf{u}_S = \mathbf{f}(\mathbf{v})$

$$\delta \mathbf{u}_S = \begin{bmatrix} 1-v_9 & 0 & 0 & v_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{n21} \\ 0 & 1-v_9 & 0 & 0 & v_9 & 0 & 0 & 0 & y_{n21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{v} = \mathbf{B}_S \delta \mathbf{v} \quad (68)$$

missä

$$\begin{aligned} x_{n21} &= X_2 + v_4 - X_1 - v_1 \\ y_{n21} &= Y_2 + v_5 - Y_1 - v_2 \end{aligned} \quad (69)$$

Vastaava kinemaattinen yhteys toisena orjaelementtinä toimivalla palkkielementillä, jonka lokaalisiirtymiä merkitään  $\mathbf{u}_B$ , on

$$\delta \mathbf{u}_B = [\mathbf{I}_{6 \times 6} \quad \mathbf{0}_{6 \times 3}] \delta \mathbf{v} = \mathbf{B}_B \delta \mathbf{v} \quad (70)$$

Sisäisten solmuvoimien vektori  $\mathbf{q}_{\text{int}}$  liuku-jousipalkkielementille saadaan orjaelementteinä toimivien palkkielementin ja jousielementin sisäisistä solmuvoimavektoreista, jotka on muunnettu isäntäelementin kinemaattiseen malliin yhteyttä (8) käyttäen, summana

$$\mathbf{q}_{\text{int}} = \mathbf{B}_B^T \mathbf{q}_{\text{int}B} + \mathbf{B}_S^T \mathbf{q}_{\text{int}S} \quad (71)$$

missä alaindeksi B viittaa palkkielementin sisäisten solmuvoimien vektoriin ja alaindeksi S viittaa jousielementin sisäisten solmuvoimien vektoriin. Tangentiaalinen jäykkyysmatriisi, massamatriisi ja hitausvoimien vektori muodostetaan vastaavalla tavalla käyttäen yhtälöitä (9) ja (13).

### 3.5 Kaksoisliuku-jousipalkkielementti

Lisäämällä toinen liukujousi edellä esitettyyn offset-liuku-jousipalkkielementtiin saadaan offset-kaksoisliuku-jousipalkkielementti, jota myös tarvitaan mallinnettaessa teleskooppipuumistoa, jossa on enemmän kuin kaksi toisiinsa nähden liukuvaa jaksoa. Elementin solmusiirtymävektori  $\mathbf{v}$  on

$$\mathbf{v} = \{v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6 \ v_7 \ v_8 \ v_9 \ v_{10} \ v_{11} \ v_{12}\} \quad (72)$$

missä kolme viimeistä siirtymätermiä viittaavat toiseen liukujouseen.

Valitaan sitten kahdelle jouselle niiden yhteiseksi lokaaliksi solmusiirtymävektori

$$\mathbf{u}_{S2} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8\} \quad (73)$$

missä vapausasteet  $u_1$ - $u_4$  viittaavat ensimmäiseen ja vapausasteet  $u_5$ - $u_8$  viittaavat toiseen jouseen. Jousien lokaalisiirtymien  $\mathbf{u}_{S2}$  ja kaksoisliukujousipalkkielementin siirtymien  $\mathbf{v}$  välillä on kytkentäyhtälö



$$\mathbf{u}_{S2} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-v_9)(X_1+v_1)+v_9(X_2+v_4)-(1-v_{90})X_1-v_{90}X_2 \\ (1-v_9)(Y_1+v_2)+v_9(Y_2+v_5)-(1-v_{90})Y_1-v_{90}Y_2 \\ v_7 \\ v_8 \\ (1-v_{12})(X_1+v_1)+v_{12}(X_2+v_4)-(1-v_{120})X_1-v_{120}X_2 \\ (1-v_{12})(Y_1+v_2)+v_{12}(Y_2+v_5)-(1-v_{120})Y_1-v_{120}Y_2 \\ v_{10} \\ v_{11} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) \quad (74)$$

missä  $v_{90}$  määrittää ensimmäisen liu'un ja  $v_{120}$  toisen liu'un alkuaseman. Kinemaattinen matriisi  $\mathbf{B}_{S2}$  saadaan varioimalla kytkentäyhtälöä  $\mathbf{f}$

$$\delta \mathbf{u}_{S2} = \begin{bmatrix} 1-v_9 & 0 & 0 & v_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{n21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-v_9 & 0 & 0 & v_9 & 0 & 0 & 0 & y_{n21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-v_{12} & 0 & 0 & v_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{n21} \\ 0 & 1-v_{12} & 0 & 0 & v_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{n21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{v} = \mathbf{B}_{S2} \delta \mathbf{v} \quad (75)$$

missä

$$\begin{aligned} x_{n21} &= X_2 + v_4 - X_1 - v_1 \\ y_{n21} &= Y_2 + v_5 - Y_1 - v_2 \end{aligned} \quad (76)$$

Vastaava kinemaattinen yhteys toisena orjaelementtinä toimivalla palkkielementillä, jonka lokaalisiirtymiä merkitään  $\mathbf{u}_B$ , on

$$\delta \mathbf{u}_B = [\mathbf{I}_{6 \times 6} \quad \mathbf{0}_{6 \times 6}] \delta \mathbf{v} = \mathbf{B}_B \delta \mathbf{v} \quad (77)$$

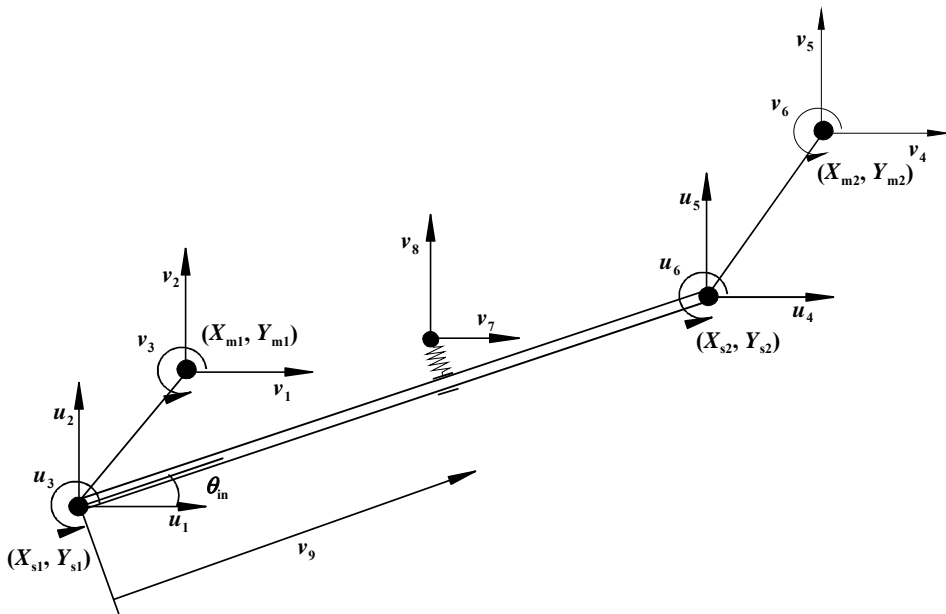
Sisäisten solmuvoimien vektori  $\mathbf{q}_{\text{int}}$  kaksoisliukujousipalkkielementille saadaan taas summaamalla orjaelementteinä toimivien palkkielementin ja jousielementtien sisäiset solmuvoimavektorit, jotka on muunnettu isäntäelementin kinemaattiseen malliin yhteyttä (8) käyttäen, muotoon

$$\mathbf{q}_{\text{int}} = \mathbf{B}_B^T \mathbf{q}_{\text{int}B} + \mathbf{B}_{S2}^T \mathbf{q}_{\text{int}S} \quad (78)$$

missä alaindeksi B viittaa palkkielementin sisäisten solmuvoimien vektoriin ja alaindeksi S2 viittaa jousielementtien sisäisten solmuvoimien vektoriin, jossa on siis kahden eri jousen solmuvoimat allekkain. Tangentiaalinen jäykkyysmatriisi, massamatriisi ja hitausvoimien vektori muodostetaan vastaavalla tavalla käyttäen yhtälöitä (9) ja (13).

### 3.6 Offset-liuku-jousipalkkielementti

Yhdistämällä liukujousi offset-palkkielementtiin saadaan offset-liukujousipalkkielementti, joka on esitetty kuvassa 7.



Kuva 7. Offset-liuku-jousipalkkielementti ja sen vapausasteet.

Elementin sisäinen solmuvoimavektori, tangentiaalinen jäykkyysmatriisi ja massamatriisi saadaan lisäämällä identiteettikuvaus liuku-jousipalkkielementin lisävapausasteille. Kinemaattinen matriisi  $\mathbf{B}$  liuku-jousipalkkielementin vapausasteiden ja vastaavan offset-liuku-jousipalkkielementin vapausasteiden välille saadaan

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{off}} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (79)$$

missä kinemaattinen matriisi  $\mathbf{B}_{\text{off}}$  saadaan yhtälöstä (65). Elementin sisäinen solmuvoimavektori voidaan laskea muodosta

$$\mathbf{q}_{\text{int}} = \mathbf{B}^T \mathbf{q}_{\text{intJL}} \quad (80)$$

missä alaindeksi JL viittaa jousi-liukupalkkielementin sisäisten solmuvoimien vektoriin, joka saadaan yhtälöstä (78).

### 3.7 Offset-kaksoisliuku-jousipalkkielementti

Kinemaattinen matriisi  $\mathbf{B}$  kaksoisliuku-jousipalkkielementin vapausasteiden ja vastaavan offset-kaksoisliuku-jousipalkkielementin vapausasteiden välille saadaan

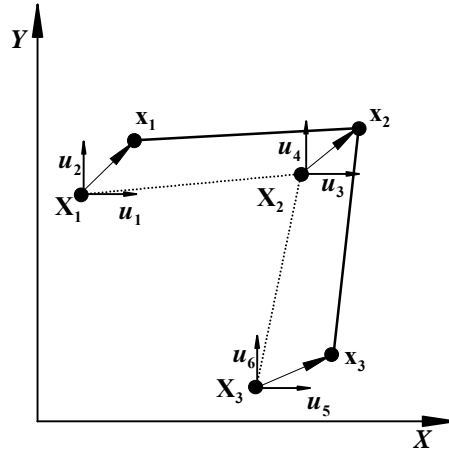
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{off}} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (81)$$

Elementin sisäinen voimavektori, tangentiaalinen jäykkyysmatriisi ja massamatriisi saadaan vastaavasti kuin offset-liuku-jousipalkkielementille on esitetty.

### 3.8 KytKentäelementti

Kuvattaessa erilaisia kinemaattisia kytKentöjä voidaan käyttää elementtiä, joka vetosuunnassa vastaa köyttä. Elementti ottaa kuitenkin köydestä poiketen vas-

taan myös puristuspuolen kuormitukset. Tämä käyttäytyminen on puhtaasti tarkoituksenmukaisuuskysymys ja tarvittaessa elementti voitaisiin korvata kahdella vain vetokuormituksen vastaanottavalla elementillä. Kytkentäelementti on esitetty kuvassa 8.



Kuva 8. Kytkentäelementti alkutilassa (katkoviiva) ja deformoituneessa tilassa (yhtenäinen viiva).

Kytkentäelementin siirtymättömässä tilassa sen kolmen solmun asema mitataan alkutilan yleistetyllä paikkavektorilla

$$\mathbf{X} = \{X_1 \ Y_1 \ X_2 \ Y_2 \ X_3 \ Y_3\} = \{\mathbf{X}_1^T \ \mathbf{X}_2^T \ \mathbf{X}_3^T\} \quad (82)$$

Elementtiä kuormitettaessa se siirtyy uuteen asemaan  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$  ja syntynyttä siirtymää mitataan elementin solmuisiirtymävektorilla

$$\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6\} \quad (83)$$

Elementin pituus alkutilassa on

$$L_0 = \sqrt{\mathbf{X}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{X}} + \sqrt{\mathbf{X}^T \mathbf{A}_2 \mathbf{X}} \quad (84)$$

missä matriisit  $\mathbf{A}_1$  ja  $\mathbf{A}_2$  ovat

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \\ \text{symm.} & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (85)$$

ja vastaavasti deformoitunut pituus

$$L_n = L_1 + L_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{x}} + \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{A}_2 \mathbf{x}}. \quad (86)$$

missä  $L_1$  ja  $L_2$  ovat kytkentäelementin osapituudet deformoituneessa tilassa. Elementin insinöörivenymä on

$$\varepsilon = \frac{L_n}{L_0} - 1 \quad (87)$$

Sisäisten solmuvoimien vektorin johtamiseksi varioidaan venymän lauseke

$$\delta \varepsilon = \frac{\delta L_n}{L_0} = \frac{1}{L_0} \mathbf{x}^T \left( \frac{\mathbf{A}_1}{L_1} + \frac{\mathbf{A}_2}{L_2} \right) \delta \mathbf{u} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (88)$$

Sisäisten solmuvoimien vektori saadaan soveltamalla sisäisten voimien virtuaalisen työn lauseketta soveltamalla muotoon

$$\mathbf{q}_{\text{int}} = \int_{V_0} \mathbf{B}^T \sigma_E dV_0 = A_0 \sigma_E \left( \frac{\mathbf{A}_1}{L_1} + \frac{\mathbf{A}_2}{L_2} \right) \mathbf{x} \quad (89)$$

Tangenciaalinen jäykkymatriisi saadaan linearisoimalla sisäisten solmuvoimien vektori

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{q}_{\text{int}}; \Delta \mathbf{u}) &= \mathbf{q}_{\text{int}0} + \left[ A_0 \sigma_E \mathbf{A} + \frac{EA_0}{L_0} \mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{A} - A_0 \sigma_E \left( \frac{\mathbf{A}_1}{L_1^3} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{A}_1 + \frac{\mathbf{A}_2}{L_2^3} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{A}_2 \right) \right] \bullet \Delta \mathbf{u} \\ &= \mathbf{q}_{\text{int}0} + \mathbf{k}_t \bullet \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (90)$$

missä on käytetty lyhennettä

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}_1}{L_1} + \frac{\mathbf{A}_2}{L_2} \quad (91)$$

Massamatriisiin johtamiseksi määritetään kytkentäelementin pituussuhteet

$$\xi_1 = \frac{L_1}{L} \quad \text{ja} \quad \xi_3 = \frac{L_2}{L} \quad (92)$$

jotka toteuttavat ehdon  $\xi_1 + \xi_3 = 1$ . Kytkentäelementin piste voidaan nyt identifioida

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s_1) &= \mathbf{x}_1 + \frac{s_1}{\xi_1} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1 \mathbf{x} + \frac{s_1}{\xi_1} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \mathbf{x} & s_1 \in [0, \xi_1] \\ \mathbf{x}(s_3) &= \mathbf{x}_3 + \frac{s_3}{\xi_3} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) = \mathbf{b}_3 \mathbf{x} + \frac{s_3}{\xi_3} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3) \mathbf{x} & s_3 \in [0, \xi_3] \end{aligned} \quad (93)$$

missä ensimmäinen lauseke on voimassa solmujen 1 ja 2 välillä ja toinen vastavasti solmujen 3 ja 2 välillä. Määritellään apumatriisit  $\mathbf{b}_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= [\mathbf{I}_{2 \times 2} \quad \mathbf{0}_{2 \times 2} \quad \mathbf{0}_{2 \times 2}] \\ \mathbf{b}_2 &= [\mathbf{0}_{2 \times 2} \quad \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad \mathbf{0}_{2 \times 2}] \\ \mathbf{b}_3 &= [\mathbf{0}_{2 \times 2} \quad \mathbf{0}_{2 \times 2} \quad \mathbf{I}_{2 \times 2}] \end{aligned} \quad (94)$$

Seuraavassa on tarkasteltu elementtiä solmujen 1 ja 2 välillä. Kytkentäelementin pisteen nopeus on

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(s_1) &= \mathbf{v}_1 + \frac{s_1}{\xi_1}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + s_1 \left( \frac{\dot{L}}{L_1} - \frac{\dot{L}_1 L}{L_1^2} \right) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ &= \mathbf{b}_1 \mathbf{v} + \frac{s_1}{\xi_1} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \mathbf{v} + s_1 \left( \frac{\dot{L}}{L_1} - \frac{\dot{L}_1 L}{L_1^2} \right) (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \mathbf{x}\end{aligned}\quad (95)$$

Elementin pituuksien aikaderivaatat saadaan

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= \frac{1}{L_1} \mathbf{x}^T \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{L} &= \mathbf{x}^T \left( \frac{\mathbf{A}_1}{L_1} + \frac{\mathbf{A}_2}{L_2} \right) \dot{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (96)$$

ja elementin nopeuskenttä käyttäen elementin solmunopeusvektoria  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{v}(s_1) = (\mathbf{b}_1 + s_1 \mathbf{d}_1) \mathbf{v} \quad (97)$$

missä

$$\mathbf{d}_1 = \frac{1}{\xi_1} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) + (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \mathbf{x} \mathbf{x}^T \left( \frac{L_1 - L}{L_1^3} \mathbf{A}_1 + \frac{1}{L_1 L_2} \mathbf{A}_2 \right) \quad (98)$$

Vastaavat yhteydet voidaan johtaa elementin solmujen 3 ja 2 välille käyttäen yhtälön (93) jälkimmäistä osuutta. Hitausvoimien virtuaalinen työ saadaan integroimalla elementin alkuperäisen tilavuuden yli ja ottamatta huomioon matriisin  $\mathbf{d}_1$  aikariippuvuutta

$$\delta W_{\text{acc}} = \int_{V_0} \delta \mathbf{u} \bullet \rho \dot{\mathbf{v}} dV = \delta \mathbf{u}^T \left\{ \rho A_0 L_0 \sum_{i=1,3}^{\xi_i} \int_0^{\xi_i} (\mathbf{b}_i + s \mathbf{d}_i)^T (\mathbf{b}_i + s \mathbf{d}_i) ds \right\} \dot{\mathbf{v}} \quad (99)$$

josta elementin massamatriisiksi saadaan

$$\mathbf{m} = m \sum_{i=1,3} \left( \xi_i \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \frac{\xi_i^2}{2} (\mathbf{d}_i^T \mathbf{b}_i + \mathbf{b}_i^T \mathbf{d}_i) + \frac{\xi_i^3}{3} \mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_i \right) \quad (100)$$

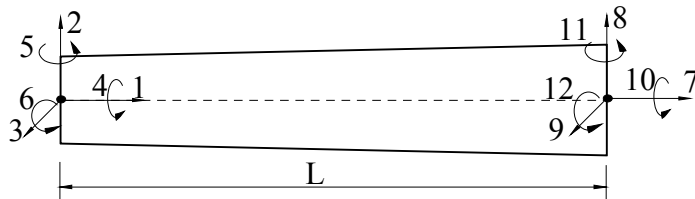
joka on liike-energiatarkastelujen perusteella tarkka.

Vastaava kolmiulotteinen elementti saadaan suoraan lisäämällä elementin mittauksiin  $Z$ -akselin suuntaiset mittauskomponentit ja tekemällä tarvittavat muutokset matriiseihin  $\mathbf{A}_1$  ja  $\mathbf{A}_2$ , yhtälö (85) sekä apumatriiseihin  $\mathbf{b}_i$  yhtälö (94).

## 3.9 Avaruuspalkkielementti

### 3.9.1 Lineaarinen Euler-Bernoulli-palkkielementti

Tarkastellaan ensin suoraa lineaarista palkkielementtiä, jonka vetojäykkyys-, vääntö- ja pintakeskiön uran oletetaan yhtyvän. Palkilla on kaksi solmua ja kuusi solmuvapausastetta, jotka näkyvät kuvassa 9.



Kuva 9. Kolmiulotteinen palkkielementti ja sen solmuvapausasteet.

Käyttämällä muotofunktioita:



$$\begin{aligned}
N_1 &= 1 - \frac{x}{L}, N_2 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, N_3 = N_2 \\
N_4 &= N_1, N_5 = -L\left[\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right], N_6 = -N_5 \\
N_7 &= \frac{x}{L}, N_8 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, N_9 = N_8 \\
N_{10} &= N_7, N_{11} = -L\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right], N_{12} = -N_{11}
\end{aligned} \tag{101}$$

ja ottamalla käyttöön apuvektorit

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_p &= \{N_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_7 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \\
\mathbf{N}_t &= \{0 \ 0 \ 0 \ N_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_{10} \ 0 \ 0\} \\
\mathbf{N}_y &= \{0 \ 0 \ N_3 \ 0 \ N_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_9 \ 0 \ N_{11} \ 0\} \\
\mathbf{N}_z &= \{0 \ N_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_6 \ 0 \ N_8 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_{12}\}
\end{aligned} \tag{102}$$

saadaan lineaarisen teorian mukaiseksi jäykkyyismatriisiksi palkin lokaalikoordinaatistossa

$$\mathbf{k} = \int_L EI_z \mathbf{N}_{z,xx}^T \mathbf{N}_{z,xx} dL + \int_L EI_y \mathbf{N}_{y,xx}^T \mathbf{N}_{y,xx} dL + \int_L EAN_{p,x}^T \mathbf{N}_{p,x} dL + \int_L GI_t \mathbf{N}_{t,x}^T \mathbf{N}_{t,x} dL \tag{103}$$

olettamalla edelleen, että poikkileikkauksen pintasuureet voidaan lausua lineaarisesti interpoloimalla solmuarvoista

$$\begin{aligned}
A &= N_1 A_1 + N_7 A_2 \\
I_y &= N_1 I_{y1} + N_7 I_{y2} \\
I_z &= N_1 I_{z1} + N_7 I_{z2} \\
I_v &= N_1 I_{v1} + N_7 I_{v2}
\end{aligned} \tag{104}$$

missä pintasuureen alaindeksi viittaa sen arvoon ko. solmussa ja suorittamalla integroinnit saadaan jäykkyyismatriisin lauseke, joka on esitetty liitteessä A.

Lineaarisen stabiilisuusteorian mukainen geometrinen jäykkyyismatriisi saadaan

$$\mathbf{k}_G = N \left( \int_L \mathbf{N}_{z,x}^T \mathbf{N}_{z,x} dL + \int_L \mathbf{N}_{y,x}^T \mathbf{N}_{y,x} dL \right) \quad (105)$$

Suorittamalla integrointi saadaan geometriseksi jäykkyyismatriisiksi

$$\mathbf{k}_G = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 & 3L \\ & & 36 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & -3L & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & -L^2 & 0 \\ & & & & & 4L^2 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 36 & 0 & 0 & 0 & -3L \\ & & & & & & & & 36 & 0 & 3L & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (106)$$

*symm.*

missä  $N$  on palkkielementin normaalivoima.

Palkkielementin massamatriisiksi saadaan

$$\mathbf{m} = \rho \left( \int_L A \mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_z dL + \int_L A \mathbf{N}_y^T \mathbf{N}_y dL + \int_L A \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p dL + \int_L I_p \mathbf{N}_t^T \mathbf{N}_t dL \right) \quad (107)$$

Massamatriisin lauseke on esitetty integroituna liitteessä B.

### 3.9.2 Epälineaarinen avaruuspalkkielementti

Seuraavassa esiteltävä lähteen [9] mukainen epälineaarinen avaruuspalkkielementti perustuu Reissnerin kinemaattisesti tarkkaan palkkiteoriaan, missä siirtymäkenttä mitataan kiinteään koordinaatistoon nähden. Rajoittaudutaan taas vain palkkielementtiin, jolla on kaksi solmua ja lineaariset muotofunktiot. Elementillä on kuusi solmuvapausastetta, kolme siirtymävapausastetta sekä kolme rotaatiovapausastetta.

Palkin sisäinen voimavektori saadaan vastaavasti kuin kaksiulotteiselle palkkielementille yhtälöstä (57).

Kolmiulotteiselle elementille kinemaattinen matriisi  $\mathbf{B}$  on [9]

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{R}^T \mathbf{x}'_0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \widetilde{\mathbf{K} \mathbf{T} + \mathbf{T}'} \end{bmatrix} \mathbf{Q} \quad (108)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} N'_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & N'_2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N'_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & N'_2 \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & N_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & N_2 \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

ja jännitysresultanttivektori  $\mathbf{S}$  on

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & & & & \\ & GA_{sy} & & & & \\ & & GA_{sz} & & & \\ & & & GI_v & & \\ & & & & EI_y & \\ & & & & & EI_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (109)$$

missä venymä  $\varepsilon$  viittaa aksiaaliseen venymään ja leikkaumuodonmuutokseen sekä  $\kappa$  kaarevuuteen. Ne määritellään

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{e}_1) \\ \mathbf{T}(\boldsymbol{\Psi}) \boldsymbol{\Psi}' \end{bmatrix} \quad (110)$$

missä rotaatiomatriisi

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \|\boldsymbol{\Psi}\|}{\|\boldsymbol{\Psi}\|} \tilde{\boldsymbol{\Psi}} + \frac{1 - \cos \|\boldsymbol{\Psi}\|}{\|\boldsymbol{\Psi}\|^2} \tilde{\boldsymbol{\Psi}} \tilde{\boldsymbol{\Psi}} \quad (111)$$

ja tangenttimatriisi

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} + \left( \frac{\cos \|\boldsymbol{\Psi}\| - 1}{\|\boldsymbol{\Psi}\|^2} \right) \tilde{\boldsymbol{\Psi}} + \left( 1 - \frac{\sin \|\boldsymbol{\Psi}\|}{\|\boldsymbol{\Psi}\|} \right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\Psi}} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}}{\|\boldsymbol{\Psi}\|^2} \quad (112)$$

sekä rotaatiovektori

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (113)$$

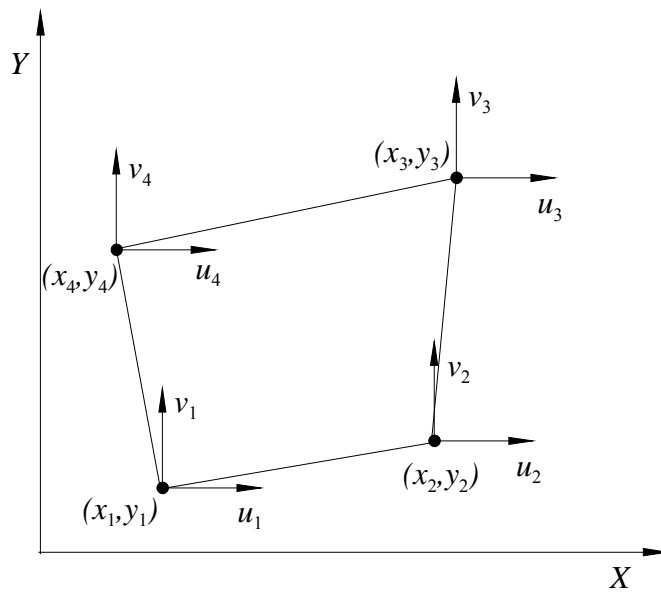
Palkin poikkileikkauksen jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{D}_2 = \text{diag} \left[ EA, GA_{s_y}, GA_{s_z}, GI_v, EI_y, EI_z \right] \quad (114)$$

koostuu aksiaalijäykkyydestä  $EA$ , leikkausjäykkyyksistä  $GA_{sy}$  sekä  $GA_{sz}$ , vääntöjäykkyydestä  $GI_v$  ja taivutusjäykkyyksistä  $EI_y$  ja  $EI_z$ . Palkkielementin tangenti-aalinen jäykkymatriisi saadaan yhtälöstä (61) ja sen massamatriisi saadaan yhtälöstä (55).

### 3.10 Levelementti

Tarkastellaan kuvan 10 mukaista nelisolmuista levelementtiä.



Kuva 10. Nelisolmuisen levelementin solmusiirtymät.

Solmujen (1...4) asemat siirtymättömässä tilassa ovat

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} = [\hat{\mathbf{x}} \quad \hat{\mathbf{y}}] \quad (115)$$

Kuvataan solmujen siirtymiä vektorilla

$$\mathbf{u}_e = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\} \quad (116)$$

Elementin muotofunktiona käytetään bi-lineaarisia muotofunktioita

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ h_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ h_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ h_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (117)$$

merkitsemällä

$$\mathbf{h} = \{h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4\} \quad (118)$$

saadaan elementin pisteen asema

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}} \\ y(\xi, \eta) = \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{y}} \end{cases} \quad (119)$$

Geometrisen kuvauksen Jacobin matriisi voidaan nyt lausua

$$\mathbf{J}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{,\xi}^T \\ \mathbf{h}_{,\eta}^T \end{bmatrix} \mathbf{X} \quad (120)$$

Ottamalla vielä käyttöön apuvektorit

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_u &= \{h_1 \ 0 \ h_2 \ 0 \ h_3 \ 0 \ h_4 \ 0\} \\ \mathbf{h}_v &= \{0 \ h_1 \ 0 \ h_2 \ 0 \ h_3 \ 0 \ h_4\}\end{aligned}\quad (121)$$

saadaan elementin siirtymäkenttä muotoon

$$\begin{cases} u(\xi, \eta) = \mathbf{h}_u^T \mathbf{u}_e \\ v(\xi, \eta) = \mathbf{h}_v^T \mathbf{u}_e \end{cases}\quad (122)$$

derivoimalla  $X$ -akselin suuntaisen siirtymän  $u$  lauseke koordinaattien  $x$  ja  $y$  suhteen saadaan

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = J_{11}^{-1} \frac{\partial u}{\partial \xi} + J_{12}^{-1} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \mathbf{h}_{u,x}^T \mathbf{u}_e = u_{,x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = J_{21}^{-1} \frac{\partial u}{\partial \xi} + J_{22}^{-1} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \mathbf{h}_{u,y}^T \mathbf{u}_e = u_{,y} \end{cases}\quad (123)$$

Siirtymän  $u$  derivaattojen lausekkeissa (123) termit  $J_{ij}^{-1}$  ovat geometrisen kuvauksen Jacobin matriisin kääntematriisin alkioita. Vastaavanlaiset lausekkeet saadaan myös  $Y$ -akselin suuntaiselle siirtymälle  $v$ .

Greenin venymä voidaan nyt lausua [7] muodossa

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{,x} & 0 & v_{,x} & 0 \\ 0 & u_{,y} & 0 & v_{,y} \\ u_{,y} & u_{,x} & v_{,y} & v_{,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{bmatrix} = (\mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{A}) \boldsymbol{\theta} \quad (124)$$

missä

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \{u_{,x} \ u_{,y} \ v_{,x} \ v_{,y}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{u,x}^T \\ \mathbf{h}_{u,y}^T \\ \mathbf{h}_{v,x}^T \\ \mathbf{h}_{v,y}^T \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \mathbf{G} \mathbf{u}_e \quad (125)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_{,x} & 0 & v_{,x} & 0 \\ 0 & u_{,y} & 0 & v_{,y} \\ u_{,y} & u_{,x} & v_{,y} & v_{,x} \end{bmatrix}$$

eli Greenin venymä lausuttuna elementin solmusiirtymien avulla on muotoa

$$\mathbf{E}_1 = (\mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{A}) \mathbf{G} \mathbf{u}_e \quad (126)$$

Elementin sisäinen voimavektori saadaan varioimalla Greenin venymän lauseketta (126).

$$\delta \mathbf{E}_1 = (\mathbf{H} + \mathbf{A}) \mathbf{G} \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}_e) \delta \mathbf{u}_e \quad (127)$$

Virtuaalisen työn periaatteesta seuraa elementin sisäiseksi voimavektoriksi

$$\mathbf{q}_i = \int_{V_0} \mathbf{B}_{nl}^T \mathbf{S}_1 dV_0 \quad (128)$$

missä vektori  $\mathbf{S}_1$  on Piola-Kirchhoffin toisen jännitystensorin komponentit lausuttuna vektorimuodossa.

$$\mathbf{S}_1 = \{S_{11} \ S_{22} \ S_{12}\} \quad (129)$$



Tangentiaalisen jäykkyyismatriisin lauseke saadaan varioimalla sisäisten voimien lauseketta siirtymäkentän suhteen

$$\delta \mathbf{q}_i = \int_{V_0} \delta \mathbf{B}_{nl}^T \mathbf{S}_1 dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}_{nl}^T \delta \mathbf{S}_1 dV_0 = \mathbf{k}_t \bullet \delta \mathbf{u}_e \quad (130)$$

suorittamalla varioinnit saadaan

$$\mathbf{k}_t = \int_{V_0} \mathbf{B}_{nl}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_{nl} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{S}} \mathbf{G} dV_0 \quad (131)$$

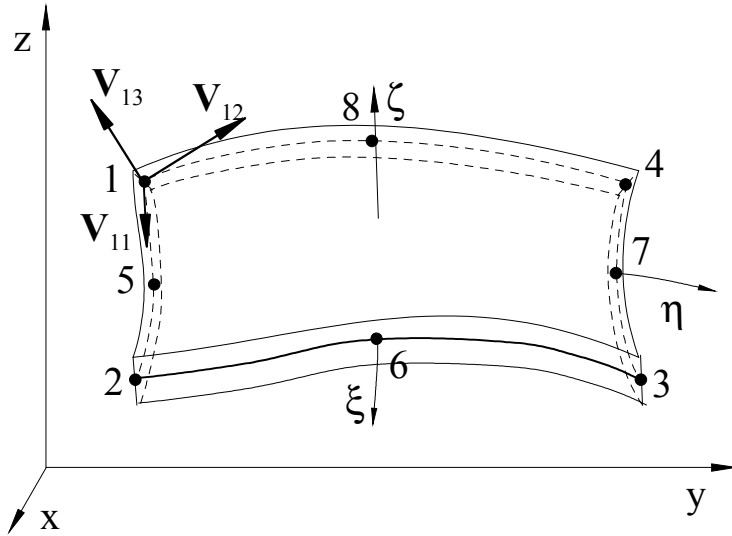
missä neljän kerraluvun konstitutiivinen tensori  $\mathbf{D}_4$  on esitetty matriisimuodossa  $\mathbf{D}_2$  [4] ja matriisi

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & S_{21} \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (132)$$

Edellä esitettyjä lausekkeitä voidaan soveltaa myös rotaatiosymmetriselle levyelementille, kunhan lisäksi otetaan huomioon kehän suuntainen venymä ja tästä aiheutuva jännitys. Hyperkimmoinen materiaalimalli kannattaa tässä yhteydessä kuitenkin olettaa kokoonpuristuvaksi, koska kyseessä on jo ”aito” kolmiulotteinen tehtävä. Edelleen käyttämällä bikvadraattisia muotofunktioita saadaan vastaavat lausekkeet 8-solmuiselle elementille.

### 3.11 Kuorielementti

Tarkastellaan tässä yhteydessä kuvan 11 mukaista lineaarista 8-solmuista AIZ (Ahmad, Irons ja Zienkiewicz, 1970) kuorielementtiä, jonka kinematiikka on johdettu degeneroimalla solidielementistä [1].



Kuva 11. AIZ -kuorielementin solmunumerot ja emokoordinaatisto.

Elementillä on kahdeksan solmua ja viisi lokaalia solmuvapausastetta, joista kolme ensimmäistä ovat siirtymät globaaliakseleiden suuntaan sekä kaksi rotaatiota  $\alpha$  ja  $\beta$ , jotka mitataan kussakin solmussa erikseen määritetyssä ortonormeeratussa kannassa  $(\mathbf{V}_{1i}, \mathbf{V}_{2i}, \mathbf{V}_{3i})$ . Kantavektorit voidaan määrätä usealla eri tavalla. Tässä esityksessä vektorikolmikko on laskettu seuraavasti:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_\xi &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \\
 \mathbf{r}_\eta &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} \\
 \mathbf{V}_i^3 &= (l_{3i}, m_{3i}, n_{3i})^T = \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta / \|\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta\| \\
 \mathbf{V}_i^1 &= \mathbf{r}_\xi / \|\mathbf{r}_\xi\| \\
 \mathbf{V}_i^2 &= \mathbf{V}_i^3 \times \mathbf{V}_i^1
 \end{aligned} \tag{133}$$

Elementin muotofunktiot [22] ovat

$$\begin{aligned}
N_1 &= (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)/4 \\
N_2 &= (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)/4 \\
N_3 &= (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)/4 \\
N_4 &= (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)/4 \\
N_5 &= (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \\
N_6 &= (1+\xi)(1-\eta^2)/2 \\
N_7 &= (1-\xi^2)(1+\eta)/2 \\
N_8 &= (1-\xi)(1-\eta^2)/2
\end{aligned} \tag{134}$$

Kuoren pisteiden paikkavektorit alkutilassa määritetään

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \mathbf{X}_i + \sum_{i=1}^8 N_i \frac{t}{2} \zeta \mathbf{V}_i^3 \tag{135}$$

missä  $t$  on kuoren paksuus. Kuoren pisteiden siirtymäkenttä vastaavasti on

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i \frac{\zeta}{2} t_i [\boldsymbol{\mu}_i] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \tag{136}$$

missä

$$[\boldsymbol{\mu}_i] = \begin{bmatrix} -l_{2i} & l_{1i} \\ -m_{2i} & m_{1i} \\ -n_{2i} & n_{1i} \end{bmatrix} \tag{137}$$

missä  $l_{1i}$ ,  $m_{1i}$  ja  $n_{1i}$  ovat solmun  $i$  kantavektorin  $\mathbf{V}^1$  komponentit ja  $l_{2i}$ ,  $m_{2i}$  ja  $n_{2i}$  ovat vektorin  $\mathbf{V}^2$  vastaavat komponentit

Konstitutiiviset yhteydet

Olkoon kuoren kantavektoreiden määräämässä tasossa voimassa jännitysten ja venymien välinen yleistetty Hooken laki

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \end{bmatrix} = \mathbf{D}'_2 \{ \boldsymbol{\varepsilon}' \}$$

(138)

Kierrettäessä neljännen kertaluvun kimmotensori globaalimittaukseen [4] sen matriisi muuntuu

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{D}'_2 \mathbf{T}_\varepsilon \quad (139)$$

missä kiertomatriisi

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & l_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + m_1 l_2 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & l_2 n_1 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + m_2 l_3 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & l_3 n_2 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + m_3 l_1 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & l_1 n_3 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (140)$$

muodostuu kantavektoreiden  $\mathbf{V}^i$  komponenteista. Matriisi muodostetaan erikseen jokaisessa integrointipisteessä käyttäen solmujen kantavektoreista muotofunktioilla interpoloituja kantavektoreita.

$$\mathbf{V}^i = \sum_{j=1}^8 N_j \mathbf{V}_j^i \quad (141)$$

Lähtien siirtymien ja venymien välisestä linearisoidusta yhteydestä saadaan kuoren siirtymien ja venymien välille kinemaattinen matriisi.

$$\mathbf{B} = \left[ [\mathbf{B}_{01} + \mathbf{B}_{11}] \quad [\mathbf{B}_{02} + \mathbf{B}_{12}] \quad \dots \quad [\mathbf{B}_{08} + \mathbf{B}_{18}] \right] \quad (142)$$

Kinemaattinen matriisi on ositettu kahteen osaan  $\mathbf{B}_0$  ja  $\mathbf{B}_1$ , joista edellinen ei muutu kuoren paksuussuunnassa. Solmua  $i$  edustava osamatriisi on

$$\mathbf{B}_{0i} = \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 & \frac{1}{2} d_i t_i \mu_{i11} & \frac{1}{2} d_i t_i \mu_{i12} \\ 0 & b_i & 0 & \frac{1}{2} e_i t_i \mu_{i21} & \frac{1}{2} e_i t_i \mu_{i22} \\ 0 & 0 & c_i & \frac{1}{2} f_i t_i \mu_{i31} & \frac{1}{2} f_i t_i \mu_{i32} \\ b_i & a_i & 0 & \frac{1}{2} (e_i t_i \mu_{i11} + d_i t_i \mu_{i21}) & \frac{1}{2} (e_i t_i \mu_{i12} + d_i t_i \mu_{i22}) \\ 0 & c_i & b_i & \frac{1}{2} (f_i t_i \mu_{i21} + e_i t_i \mu_{i31}) & \frac{1}{2} (f_i t_i \mu_{i22} + e_i t_i \mu_{i32}) \\ c_i & 0 & a_i & \frac{1}{2} (f_i t_i \mu_{i11} + d_i t_i \mu_{i31}) & \frac{1}{2} (f_i t_i \mu_{i12} + d_i t_i \mu_{i32}) \end{bmatrix} \quad (143)$$

ja vastaavasti paksuussuunnassa muuttuva osamatriisi

$$\mathbf{B}_{1i} = \frac{1}{2} t_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_i \mu_{i11} & a_i \mu_{i12} \\ 0 & 0 & 0 & b_i \mu_{i21} & b_i \mu_{i22} \\ 0 & 0 & 0 & c_i \mu_{i31} & c_i \mu_{i32} \\ 0 & 0 & 0 & a_i \mu_{i21} + b_i \mu_{i11} & a_i \mu_{i22} + b_i \mu_{i12} \\ 0 & 0 & 0 & b_i \mu_{i31} + c_i \mu_{i21} & b_i \mu_{i32} + c_i \mu_{i22} \\ 0 & 0 & 0 & a_i \mu_{i31} + c_i \mu_{i11} & a_i \mu_{i32} + c_i \mu_{i12} \end{bmatrix} \quad (144)$$

jossa on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\begin{aligned}
N_{i,x} &= J_{11}^{-1}N_{i,\xi} + J_{12}^{-1}N_{i,\eta} = a_i \\
N_{i,y} &= J_{21}^{-1}N_{i,\xi} + J_{22}^{-1}N_{i,\eta} = b_i \\
N_{i,z} &= J_{31}^{-1}N_{i,\xi} + J_{32}^{-1}N_{i,\eta} = c_i \\
(N_i \zeta)_{,x} &= a_i \zeta + N_i J_{13}^{-1} = a_i \zeta + d_i \\
(N_i \zeta)_{,y} &= b_i \zeta + N_i J_{23}^{-1} = b_i \zeta + e_i \\
(N_i \zeta)_{,z} &= c_i \zeta + N_i J_{33}^{-1} = c_i \zeta + f_i
\end{aligned} \tag{145}$$

ja  $t_i$  on kuoren paksuuden solmuarvo. Kuoren jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{k}_{40 \times 40} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \tag{146}$$

voidaan laskea analyttisesti olettaen, että Jacobin matriisi ei muutu paksuus-suunnassa. Jäykkyysmatriisin lausekkeessa

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B} &= [\mathbf{B}_0 + \zeta \mathbf{B}_1]^T \mathbf{D}_2 [\mathbf{B}_0 + \zeta \mathbf{B}_1] = \\
\mathbf{B}_0^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_0 &+ \zeta \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_0 + \zeta \mathbf{B}_0^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_1 + \zeta^2 \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_1
\end{aligned} \tag{147}$$

joten integroimalla paksuussuunnassa jäykkyysmatriisin lausekkeeksi saadaan

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \mathbf{B}_0^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_0 + \frac{1}{3} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_1 \right) t \|\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta\| d\xi d\eta \tag{148}$$

Saatu jäykkyysmatriisi tulee vielä kiertää rotaati vapausasteiden osalta globaalimittaukseen käyttäen yhteyttä

$$\begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1i} & m_{1i} & n_{1i} \\ l_{2i} & m_{2i} & n_{2i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \tag{149}$$

missä  $l_{1i}$ ,  $m_{1i}$  ja  $n_{1i}$  ovat solmun  $i$  kantavektorin  $\mathbf{V}^1$  komponentit ja  $l_{2i}$ ,  $m_{2i}$  ja  $n_{2i}$  ovat vektorin  $\mathbf{V}^2$  vastaavat komponentit. Näin laskettu jäykkyysmatriisi ei ota huomioon kuoren tasoa vastaan kohtisuoraa rotaatiojäykkyyttä. Jotta vältetään koko rakenteen singulaariselta jäykkyysmatriisilta, voidaan rotaatiojäykkyys lisätä elementille asettamalla elementin muuhun jäykkyyteen verrattuna pieni tasoa vastaan kohtisuora rotaatiojäykkyys, joka muunnetaan globaalimittaukseen ja summataan edellä laskettuun jäykkyysmatriisiin.

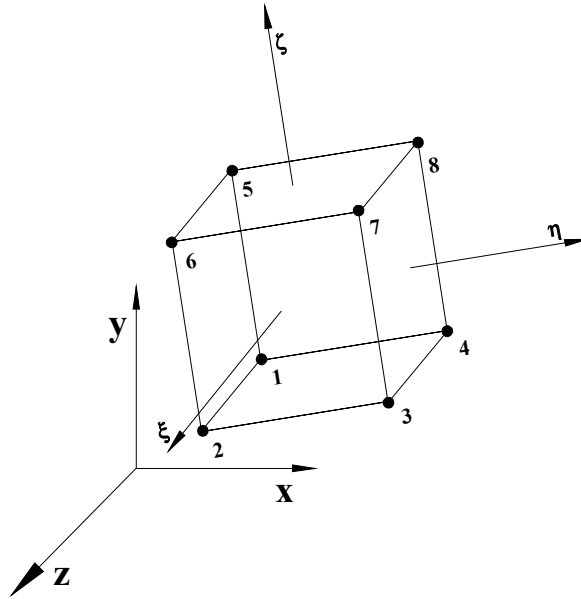
Lähtien kuoren nopeuskentän interpolaatiosta, joka saadaan yhtälön (136) aika-derivaatasta, kuoren massamatriisin lauseke saadaan muotoon

$$\mathbf{m} = \int_V (\mathbf{N}_p + \zeta \mathbf{N}_b)^T \rho (\mathbf{N}_p + \zeta \mathbf{N}_b) dV \quad (150)$$

Lauseke (150) voidaan palauttaa, vastaavasti kuin jäykkyysmatriisin lauseke, pintaintegraaliksi ja edelleen kiertää globaalimittaukseen rotaatiovapausasteiden osalta. Saadulla massamatriisilla on nollahitausta kuoren tasoa vastaan kohtisuoraan olevien rotaatioiden suhteen, ja se tulee tarvittaessa huomioida. Integroinnit kannattaa suorittaa Gaussin integroinnilla käyttäen  $2 \times 2$  pisteen näytteenottoa [22].

### 3.12 Tri-lineaarinen solidielementti

Tarkastellaan sitten kuvan 12 mukaista kahdeksansolmuista solidielementtiä.



Kuva 12. Tri-lineaarinen solidielementti.

Solmujen (1...8) asemat siirtymättömässä tilassa ovat

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} = [\hat{\mathbf{x}} \quad \hat{\mathbf{y}} \quad \hat{\mathbf{z}}] \quad (151)$$

Kuvataan solmujen siirtymiä vektorilla



$$\mathbf{u}_e = \{u_1 v_1 w_1 u_2 v_2 w_2 u_3 v_3 w_3 \dots u_8 v_8 w_8\} \quad (152)$$

Elementin muotofunktioina käytetään tri-lineaarisia muotofunktioita

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ h_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ h_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ h_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ h_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ h_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ h_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ h_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{aligned} \quad (153)$$

merkitsemällä

$$\mathbf{h} = \{h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 h_6 h_7 h_8\} \quad (154)$$

saadaan elementin tietyn pisteen asema alkutilassa

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}} \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{y}} \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad (155)$$

Geometrisen kuvauksen Jacobin matriisi voidaan nyt lausua

$$\mathbf{J}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{,\xi}^T \\ \mathbf{h}_{,\eta}^T \\ \mathbf{h}_{,\zeta}^T \end{bmatrix} \mathbf{X} \quad (156)$$

Ottamalla vielä käyttöön vektorit

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_u &= \{h_1 0 0 h_2 0 0 h_3 0 0 \dots h_8 0 0\} \\ \mathbf{h}_v &= \{0 h_1 0 0 h_2 0 0 h_3 \dots 0 h_8 0\} \\ \mathbf{h}_w &= \{0 0 h_1 0 0 h_2 0 0 h_3 0 0 \dots h_8\} \end{aligned} \quad (157)$$

elementin siirtymät voidaan lausua matriisitulona

$$\begin{cases} u(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{h}_u^T \mathbf{u}_e \\ v(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{h}_v^T \mathbf{u}_e \\ w(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{h}_w^T \mathbf{u}_e \end{cases} \quad (158)$$

derivoimalla  $X$ -akselin suuntaisen siirtymän  $u$  lauseke koordinaattien  $x$ ,  $y$  ja  $z$  suhteen saadaan

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_g^{-1} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (159)$$

Vastaavanlaiset lausekkeet saadaan myös siirtymille  $v$  ja  $w$ .

Greenin venymän vektorimuoto voidaan nyt lausua

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ u_{,z} + w_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{,x} & 0 & 0 & v_{,x} & 0 & 0 & w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & u_{,y} & 0 & 0 & v_{,y} & 0 & 0 & w_{,y} & 0 \\ 0 & 0 & u_{,z} & 0 & 0 & v_{,z} & 0 & 0 & w_{,z} \\ u_{,y} & u_{,x} & 0 & v_{,y} & v_{,x} & 0 & w_{,y} & w_{,x} & 0 \\ 0 & u_{,z} & u_{,y} & 0 & v_{,z} & v_{,y} & 0 & w_{,z} & w_{,y} \\ u_{,z} & 0 & u_{,x} & v_{,z} & 0 & v_{,x} & w_{,z} & 0 & w_{,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{bmatrix} \\
&= (\mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{A}) \boldsymbol{\theta}
\end{aligned} \tag{160}$$

missä

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{161}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \{u_{,x} \ u_{,y} \ u_{,z} \ v_{,x} \ v_{,y} \ v_{,z} \ w_{,x} \ w_{,y} \ w_{,z}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{u,x}^T \\ \mathbf{h}_{u,y}^T \\ \mathbf{h}_{u,z}^T \\ \mathbf{h}_{v,x}^T \\ \mathbf{h}_{v,y}^T \\ \mathbf{h}_{v,z}^T \\ \mathbf{h}_{w,x}^T \\ \mathbf{h}_{w,y}^T \\ \mathbf{h}_{w,z}^T \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \mathbf{G} \mathbf{u}_e \tag{162}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_{,x} & 0 & 0 & v_{,x} & 0 & 0 & w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & u_{,y} & 0 & 0 & v_{,y} & 0 & 0 & w_{,y} & 0 \\ 0 & 0 & u_{,z} & 0 & 0 & v_{,z} & 0 & 0 & w_{,z} \\ u_{,y} & u_{,x} & 0 & v_{,y} & v_{,x} & 0 & w_{,y} & w_{,x} & 0 \\ 0 & u_{,z} & u_{,y} & 0 & v_{,z} & v_{,y} & 0 & w_{,z} & w_{,y} \\ u_{,z} & 0 & u_{,x} & v_{,z} & 0 & v_{,x} & w_{,z} & 0 & w_{,x} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \quad (163)$$

Greenin venymä lausuttuna elementin siirtymien avulla on muotoa (126). Tarkka lukija saattaa huomata, että edellä esitetyt lausekkeet (161) ja (163) poikkeavat lähteen [7] vastaavista yhteyksistä. Kirjoittajan käsityksen mukaan ne ovat tässä kuitenkin oikein.

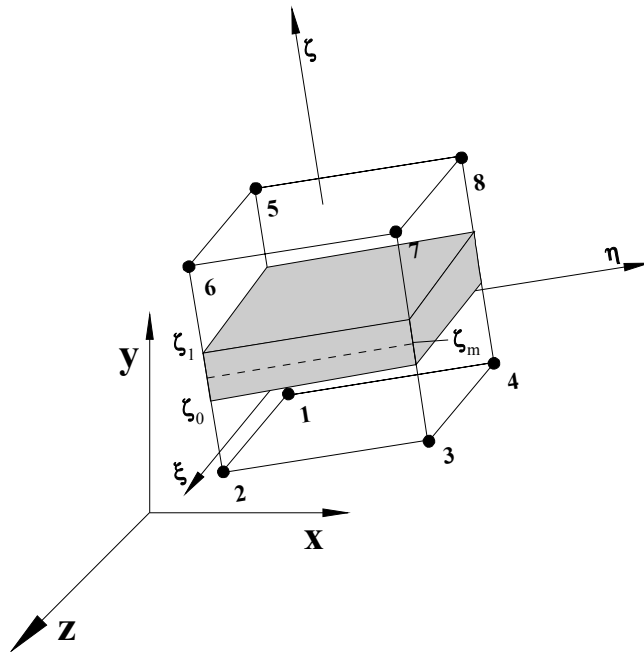
Sisäisten solmuvoimien vektori, tangentialinen jäykkyysmatriisi ja massamatriisi saadaan vastaavasti kuin levyelementin kohdalla oli esillä. Geometrisen jäykkyysmatriisin lausekkeessa (132) matriisi

$$\hat{\mathbf{S}}_{9,9} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (164)$$

Käyttämällä bikvadraattisia muotofunktioita saadaan vastaavat lausekkeet 20-solmuiselle elementille. Edellä esitetty 8-solmuinen elementti voidaan integroida Gaussin integroinnilla käyttäen 2 x 2 x 2 pisteen näytteenottoa. Vastaava 20-solmuinen elementti sisältää kuitenkin tällä näytteenotolla liikaa nollaenergiamuotoja [22] ja voi johtaa singulaariseen jäykkyysmatriisiin, vaikka rakenne on tuettu asianmukaisesti. Tämän työn yhteydessä ohjelmoitu 20-solmuinen elementti on integroitu Gaussin integroinnilla käyttäen 3 x 3 x 3 pisteen näytteenottoa.

### 3.13 Kuituvahvisteinen solidielementti

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan 13 mukaista elementtiä, joka koostuu eri kerroksista, joita on  $m$  kappaletta. Kuvassa kerros  $j$  on varjostettu. Kunkin kerroksen materiaali koostuu isotrooppisesta perusaineesta, johon on sijoitettu vahvistavia kuituja.



Kuva 13. Kuituvahvisteinen kerroselementti.

Oletetaan, että kerroksen  $j$  lineaarinen PK2-jännitysten ja Greenin venymien välinen yhteys tunnetaan ortonormeeratussa kannassa, jonka ensimmäinen kantavektori osoittaa kuitusuuntaan.

$$\mathbf{S}_f = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{23} \\ e_{13} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_{2f} \mathbf{E}_f \quad (165)$$

missä alaindeksi f viittaa kuitusuunnan määrittämään ortonormeerattuun koordinaatistoon. Lähtien neljännen kertaluvun tensorin koordinaatiston kiertosäännöstä saadaan vastaava matriisimuotoinen yhteys laskentakoordinaatistossa muotoon

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{T} \mathbf{E} \quad (166)$$

missä muunnosmatriisi

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{11}l_{12} & l_{12}l_{13} & l_{11}l_{13} \\ l_{21}^2 & l_{22}^2 & l_{23}^2 & l_{21}l_{22} & l_{22}l_{23} & l_{21}l_{23} \\ l_{31}^2 & l_{32}^2 & l_{33}^2 & l_{31}l_{32} & l_{32}l_{33} & l_{31}l_{33} \\ 2l_{11}l_{21} & 2l_{12}l_{22} & 2l_{13}l_{23} & l_{11}l_{22} + l_{12}l_{21} & l_{12}l_{23} + l_{13}l_{22} & l_{11}l_{23} + l_{13}l_{21} \\ 2l_{21}l_{31} & 2l_{22}l_{32} & 2l_{23}l_{33} & l_{21}l_{32} + l_{22}l_{31} & l_{22}l_{33} + l_{23}l_{32} & l_{21}l_{33} + l_{23}l_{31} \\ 2l_{11}l_{31} & 2l_{12}l_{32} & 2l_{13}l_{33} & l_{11}l_{32} + l_{12}l_{31} & l_{12}l_{33} + l_{13}l_{32} & l_{11}l_{33} + l_{13}l_{31} \end{bmatrix} \quad (167)$$

Muunnosmatriisin  $\mathbf{T}$  alkioit  $l_{ij}$  saadaan kuitusuunnan määrävien kantavektoreiden komponenteista. Kantavektoreiden määrittäminen voidaan tehdä esimerkiksi seuraavasti. Olkoon  $\mathbf{X}$  piste elementin alueella

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i x_i \\ N_i y_i \\ N_i z_i \end{Bmatrix} \quad (168)$$

Määritetään kuitusuunnistuksen määrittävät kantavektorit  $\mathbf{e}_i$  käyttäen apuvektoreita  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  ja  $\mathbf{c}$  seuraavasti:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \mathbf{X}(1, 0, \zeta_m) - \mathbf{X}(0, 0, \zeta_m) \\
 \mathbf{e}_\xi &= \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \\
 \mathbf{c} &= \mathbf{X}(0, 1, \zeta_m) - \mathbf{X}(0, 0, \zeta_m) \\
 \mathbf{b} &= \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_\xi \mathbf{e}_\xi \\
 \mathbf{e}_\eta &= \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}
 \end{aligned} \tag{169}$$

Olkoon kuitusuunta, jonka oletetaan olevan elementin  $\xi\eta$ -tasolla, siten, että se muodostaa  $\xi$ -akselin suhteen kulman  $\theta$ . Tällöin ortonormeerattu kanta saadaan

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{f1} &= \mathbf{e}_\xi \cos \theta + \mathbf{e}_\eta \sin \theta \\
 \mathbf{e}_{f2} &= -\mathbf{e}_\xi \sin \theta + \mathbf{e}_\eta \cos \theta \\
 \mathbf{e}_{f3} &= \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta
 \end{aligned} \tag{170}$$

Kannasta voidaan muodostaa kiertomatriisi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{f1}^T \\ \mathbf{e}_{f2}^T \\ \mathbf{e}_{f3}^T \end{bmatrix} \tag{171}$$

jonka alkioista muunnosmatriisi  $\mathbf{T}$  koostuu.

Mikäli elementissä on vain yksi kerros, niin sen sisäinen voimavektori ja tangentialinen jäykkyys voidaan nyt määrittää yhteyksiä (128) ja (131) käyttäen.

Useampikerroksisen elementin sisäinen voimavektori ja tangentialinen jäykkyys täytyy koostaa summaamalla eri kerrosten jäykkyydet. Tässä esityksessä on vielä siirretty pintaintegraaleihin, jotta integrointipisteiden lukumäärä ei kasvaisi kohtuuttomaksi. Tällöin kukin kuitukerros integroidaan Gaussin integroinnilla

pintaintegraalina käyttäen 2 x 2 näytteenottoa kertoen osasummat kunkin integrointipisteen kuitukerroksen paksuudella. Sisäinen voimavektori saadaan nyt summana

$$\mathbf{q}_i = \sum_{j=1}^m \int_{A_{0j}} \mathbf{B}_{nl}^T \mathbf{S}_{1j} t_j dA_{0j} \quad (172)$$

ja vastaava tangentiaalinen jäykkyyismatriisi muodossa

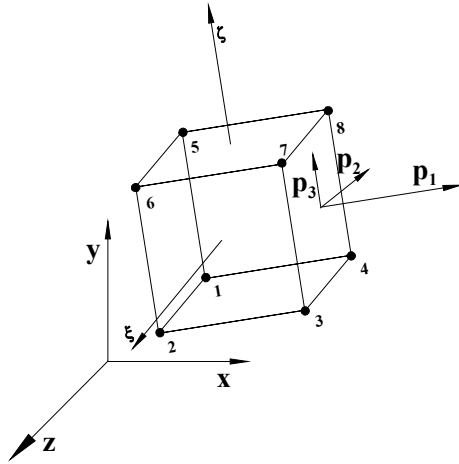
$$\mathbf{k}_t = \sum_{j=1}^m \int_{A_{0j}} \mathbf{B}_{nl}^T \mathbf{T}_j^T \mathbf{D}_{2j} \mathbf{T}_j \mathbf{B}_{nl} t_j dA_{0j} + \sum_{j=1}^m \int_{A_{0j}} \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{S}}_{1j} \mathbf{G} t_j dA_{0j} \quad (173)$$

Integroinnissa pintadifferentiaali  $dA_{0j}$  saadaan vastaavasti kuin painekuorman laskennassa on esitetty.

### 3.14 Paineen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus

Painekuormitus voi vaikuttaa elementin annetulle tahkolla. Tarkastellaan tässä yhteydessä kuvan 14 painekuormaa, joka vaikuttaa elementin tahkolla 4. Oletetaan, että paineen komponentit tahkon ja sitä vastaan kohtisuorassa suunnassa tunnetaan.





Kuva 14. Solidielementin tahkolla 4 vaikuttava painekuorma.

Otetaan käyttöön elementin tahkolla muuttujat  $u$  ja  $v$ , jotka ovat painekomponenttien  $p_2$  ja  $p_3$  suuntaan. Ekvivalenttiset solmukuormitukset  $\mathbf{r}_i$  tahkon solmulle  $i$  saadaan

$$\mathbf{r}_i = \int_A N_i \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} dA \quad (174)$$

missä integrointi ulotetaan tahkon yli. Tahkon painekomponenttien  $p_2$  ja  $p_3$  suuntaiset vektorit  $\mathbf{r}_u$  ja  $\mathbf{r}_v$  saadaan

$$\mathbf{r}_u = \left\{ \frac{dx}{du} \frac{dy}{du} \frac{dz}{du} \right\} \quad (175)$$

$$\mathbf{r}_v = \left\{ \frac{dx}{dv} \frac{dy}{dv} \frac{dz}{dv} \right\}$$

jolloin tahkon pinta-alkio

$$dA = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \quad (176)$$

ja painekomponenttien suuntaiset ykkösvektorit

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_u|} \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_v|} \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (177)$$

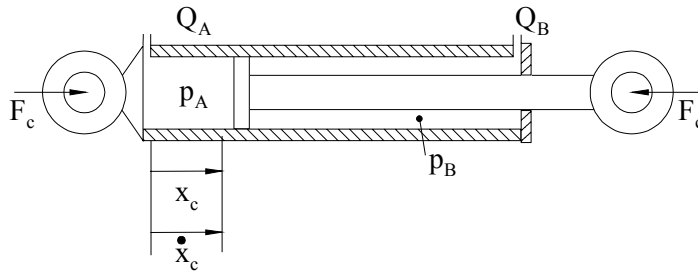
joiden avulla yhtälössä (174) tarvittavat globaalisuuntaiset paineet voidaan määrittää. Mikäli yhtälössä (175) huomioidaan elementin siirtymät, voidaan laskea niin sanotun seuraajapaineen aiheuttamaa vastetta.

### 3.15 Hydraulisyylinterin mallintaminen

Staattisella kuormituksella hydraulisyylinteri voidaan kuvata sauvaelementtiä käyttäen. Sylinterin eri asemat voidaan kuvata sauvan muuttuvana pituutena. Mikäli halutaan mallintaa myös sylinterin mahdollinen nurjahdustilanne, niin sauvaelementti voidaan korvata palkkielementeillä.

Ratkaistaessa laskentamalli dynaamisella kuormituksella voidaan hydraulisyylinteri mallintaa käyttäen erityiselementtiä. Mekaaniseen järjestelmään sylinterielementti kytketään jakamalla sylinterin silmukoissa vaikuttava voima mekaanisen järjestelmän vapausasteille.

Tarkastellaan kuvan 15 mukaista hydraulisyylinteriä, jossa kammiopaineiden  $p_A$  ja  $p_B$  oletetaan vaikuttavan koko kammiotilavuuden alueella.



Kuva 15. Hydraulisyylinterin periaatekuva.

Hydraulisyylinterin kammiopaineiden  $p_A$  ja  $p_B$  muutosnopeuksille saadaan yhteys

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_A \\ \dot{p}_B \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \frac{Q_A - A_A \dot{x}_C}{V_A + A_A x_C} \\ \frac{-Q_B + A_B \dot{x}_C}{V_B - A_B x_C} \end{bmatrix} \quad (178)$$

missä alaindeksi A viittaa sylinterin männän ja B varren puolelle ja

$Q$  on sylinteriin tuleva tai lähtevä tilavuusvirta

$A$  on sylinterin painepinta-ala

$V$  paineenalainen alkutilavuus

$B$  paineväliaineen kokoonpuristuvuuskerroin

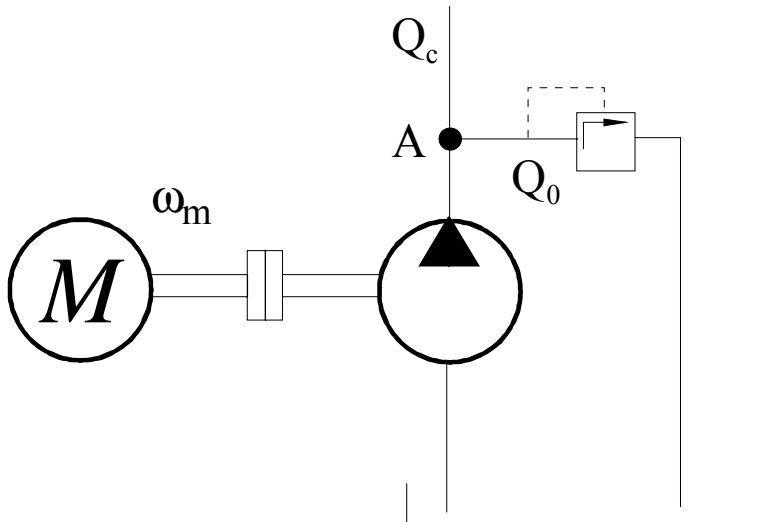
Sylinterin kiinnityssilmukoihin vaikuttava voimaresultantti saadaan vähentämällä kitkavoima painevoimien erotuksesta

$$F_C = A_A p_A - A_B p_B - F_\mu \quad (179)$$

Kitkavoimalle voidaan käyttää erilaisia laskentamalleja. Silmukoihin vaikuttava voima jaetaan mekaanisen järjestelmän vastaaville vapausasteille kohdistuviksi.

### 3.16 Hydraulipumpun mallinnus

Tarkastellaan tässä yhteydessä yksinkertaista pumppuyksikköä, kuva 16, joka koostuu moottorista, pumpusta ja paineenrajoitusventtiilistä.



Kuva 16. Moottori, hydraulipumppu ja paineenrajoitusventtiili.

Kaasupolkimen asennosta, moottorin kulmanopeudesta  $\omega_m$ , dissipaatiotehosta sekä teoreettisesta tehosta saadaan käyttömoottorin akselille aiheuttama momentti  $M_m$ . Ottamalla huomioon pumpun mekaaninen ja hydraulinen hyötysuhde sekä mahdollinen alennusvaihe saadaan hydraulipumpun teho ja sen moottorilta vaatima momentti  $M_p$ . Moottorin kulmanopeus saadaan differentiaaliyhtälöstä

$$J\dot{\omega}_m = M_m - M_p \quad (180)$$

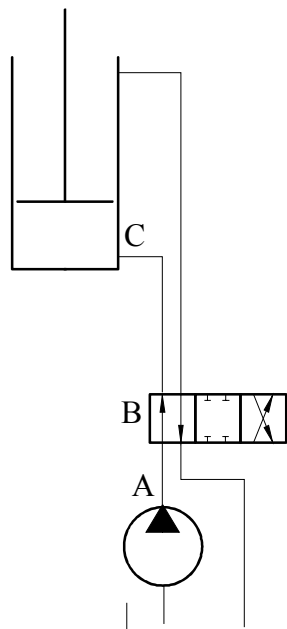
missä  $J$  on pyöritettävien osien hitausmomentti redusoituna moottorin akselille. Paineenrajoitusventtiili voidaan kuvata kuristimella ja sen läpi virtaava tilavuusvirta  $Q_0$  voidaan laskea

$$Q_0 = A_\mu \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad (181)$$

missä  $A_\mu$  on kuristusaukon tehollinen halkaisija,  $\Delta p$  on kuristimen aiheuttama paine-ero ja  $\rho$  on paineväliaineen tiheys. Halkaisija voidaan likimääräisesti määrittää esimerkiksi Hermiten polynomia käyttäen, kun paineenrajoitusventtiilin ominaisuudet tunnetaan.

### 3.17 Hydrauliputkiston mallinnus

Tarkastellaan kuvassa 17 näkyvää virtaustietä A-B-C. Jaetaan väli suuntaventtiilin kohdalta kahteen osaan ja käsitellään osavälit tilavuuksina.



*Kuva 17. Virtaustie A-B-C hydraulipumpulta sylinterille.*

*Osavälien paineen muutoksille on voimassa*

$$\begin{aligned}\dot{p}_{AB} &= K \frac{Q_A - Q_B}{V_{AB}} \\ \dot{p}_{BC} &= K \frac{Q_B - Q_C}{V_{BC}}\end{aligned}\tag{182}$$

Virtaus suuntaventtiilin B sekä putken liitännän sylinterille C läpi tulkitaan aukkovirtaukseksi, jolloin läpi virtaavan paineväliaineen tilavuusvirtaus saadaan yhtälöstä (181).

## 4. Laskentamallin ratkaisu

### 4.1 Staattinen analyysi

Newton-Raphsonin iterointi on keskeinen ratkaisumenetelmä ratkaistaessa rakenteen staattista vastetta. Menetelmä konvergoi kvadraattisesti kohti ratkaisua, mikäli alkuarvaus on riittävän lähellä tavoiteltua ratkaisua ja käytetty tangenttimatriisi on tarkka. Menetelmä on myös melko helppo ohjelmoida tietokoneelle.

Ratkaistaessa tehtävää rakenteen ulkoinen kuormitus oletetaan tunnetuksi ja tavallisesti oletetaan, että ulkoinen kuormitus ei muutu siirtymän muuttuessa. Iteraatioaskeleella kootaan rakenteen jäykkyysmatriisi elementtien jäykkyysmatriiseista ja ko. siirtymäkenttään liittyvä epätasapainovektori, joka on rakenteen ulkoisen kuormituksen ja elementtien sisäisistä voimista koottujen voimien erotus. Näiden avulla ratkaistaan rakenteen siirtymäkentän muutos, jonka toivotaan johtavan parempaan siirtymäkentän approksimaatioon, eli uuteen asemaan liittyvä epätasapainovektori on normiltaan pienempi kuin edelliseen siirtymäkenttään liittyvä epätasapaino. Iteraatiota jatketaan, kunnes epätasapainovektorin normi on pieni verrattuna ulkoisten kuormien normiin. Käytetty normi kannattaa valita siten, että sen suuruuluokka ei kasva voimakkaasti vapausasteiden lukumäärän kasvaessa. Toisaalta normin tulisi huomioida kaikki nollasta poikkeavat arvot.

Newton-Raphsonin iteroinnin yhteydessä voidaan käyttää konvergenssin parantamiseksi *suoralta haku-* tai *kaarenpituus-*menetelmiä. Lisäksi tehtävä voidaan ratkaista siirtymäohjattuna. Näitä ratkaisumenetelmiä käsitellään muun muassa lähteissä [2] ja [7].

Käytettäessä liuku-jousipalkkielementtejä tulee ratkaisun edetessä pitää kirjaa elementtien liukuvapausasteista. Mikäli vapausasteen arvo muuttuu negatiiviseksi, tulee edellinen palkkielementti muuttua liuku-jousipalkkielementiksi ja tarkasteltava elementti muutetaan tavalliseksi palkkielementiksi. Vastaavasti jos arvo nousee yli yhden, niin muutos tehdään elementtiä seuraavan elementin kanssa. Lisäksi on huomioitava mahdollinen kerroinmatriisien nauhaleveyden muutos.

## 4.2 Lineaarinen stabiilisuusanalyysi

Rakenneosien, joiden määräävä kuormitus aiheuttaa lähinnä puristusrasitusta, stabiilisuustarkastelu voidaan suorittaa lineaarista stabiilisuusanalyysiä käyttäen. Menetelmässä rakenteelle annetaan tietty kuormitus  $\mathbf{P}$  ja suoritetaan lineaarinen analyysi. Tämän jälkeen rakenteelle voidaan määrätä sen alkutilaan liittyvä geometrinen jäykkyyismatriisi. Geometrisen jäykkyyismatriisin oletetaan olevan suoraan verrannollinen kuormituskertoimeen  $\lambda$ , jolla kuormitus  $\mathbf{P}$  kerrotaan. Lineaarinen stabiilisuusanalyysi johtaa kahden matriisin ominaisongelmaan. Ominaisongelman alin ominaisarvo on kuormituskerroin  $\lambda_{cr}$ , jolla rakenne ei enää pysty kantamaan kuormitusta. Ominaisarvoa vastaavan ominaisvektorin avulla saadaan siirtymäkentän muoto, jolla rakenne pettaa. Menetelmä on likimääräinen ja antaa rakenteen kantokyvylle usein yläliikiarvon.

## 4.3 Laskentamallin dynamiikan ratkaiseminen

Mekaanisen systeemin vasteen ratkaisemiseksi laskentamallin liikeyhtälöt järjestetään joukoksi ensimmäisen kertaluvun tavallisia differentiaaliyhtälöitä (ODE's). Tätä varten tilamuuttujaksi valitaan

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (183)$$

missä  $\mathbf{u}$  edustaa laskentamallin solmusiirtymiä ja  $\mathbf{v}$  sisältää vastaavat solmunopeudet. Liikeyhtälöistä saadaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_{\text{cent}} \end{Bmatrix} \quad (184)$$

Differentiaaliyhtälöryhmä (184) tunnetulla tilamuuttujan alkuarvolla on nyt standardimuodossa



$$\begin{cases} \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (185)$$

Differentiaaliyhtälöä sanotaan “jäykäksi” tai “kankeaksi” (engl. stiff), jos sillä on suuresti vaihteleva aikaskaala. Aikaintegrointimenetelmän valintaan tulee kiinnittää erityistä huomiota, mikäli sillä halutaan ratkaista kankeita yhtälöitä. Tässä työssä on aikaintegrointimenetelmäksi valittu Rosenbrock-W-menetelmä, koska se on L-stabiili [15] edellyttäen, että  $\mathbf{f}$ :n Jacobin matriisi on tarkka. Rosenbrockin aikaintegroinnissa epälineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä korvataan joukolla lineaarisia differentiaaliyhtälöryhmiä. Tästä syystä vain yksi Newton-Raphsonin askel vaaditaan yhtä aika-askelta kohti. Iteratiivisilla ratkaisijoilla, kuten perinteisellä Runge-Kutta-menetelmällä on se heikkous, että ne lisäävät konvergenssimielessä epästabiilisuutta iteraatioprosessiin. Rosenbrockin menetelmä on yksiaskelmenetelmä, missä uusi tilamuuttujan arvo ratkaistaan

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i \quad (186)$$

Vektorit  $\mathbf{k}_i$  yhtälössä (186) ratkaistaan lausekkeesta

$$(\mathbf{A} - h\gamma\mathbf{J})\mathbf{k}_i = h\mathbf{f}\left(t_n + \alpha_i h, \mathbf{x}_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{k}_j\right) + \gamma_i h^2 \frac{\partial \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n)}{\partial t} + h\mathbf{J} \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \mathbf{k}_j \quad (187)$$

Yhtälössä (187)  $h$  on aika-askel,  $\alpha_{ij}, \gamma, \gamma_{ij}$  ovat Rosenbrockin menetelmään liittyviä vakioita, katso [15]. Jacobin matriisi on

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} \\ -\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}} & -\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_t & -\mathbf{C}_t \end{bmatrix} \quad (188)$$

Yhtälössä (188) matriisi  $\mathbf{C}_t$  on vaimennusmatriisi.

Laskenta-askeleella tarvitaan  $s$  kappaletta vektoreita  $\mathbf{k}_i$ , missä  $s$  on Rosenbrockin menetelmän kertaluku, jotka ratkaistaan yhtälöstä (187). Mikäli halutaan hyödyntää matriisin  $(\mathbf{A} - h\gamma\mathbf{J})$  harva rakenne, voidaan vektori  $\mathbf{k}_i$  jakaa kahteen osaan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -h\gamma\mathbf{I} \\ h\gamma\mathbf{K}_t & \mathbf{M} + h\gamma\mathbf{C}_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_u \\ \mathbf{k}_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_u \\ \mathbf{b}_v \end{Bmatrix} \quad (189)$$

Yksinkertaisella algebrallisella manipuloinnilla vektori  $\mathbf{k}_i$  voidaan ratkaista yhtälöstä (189)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_u &= \mathbf{b}_u + h\gamma\mathbf{k}_v \\ (\mathbf{M} + h\gamma\mathbf{C}_t + h^2\gamma^2\mathbf{K}_t)\mathbf{k}_v &= \mathbf{b}_v - h\gamma\mathbf{K}_t\mathbf{b}_u \end{aligned} \quad (190)$$

Yhtälöstä (190) nähdään, että alkuperäinen vapausastemäärä voidaan säilyttää eikä kerroinmatriisien symmetristä nauhamaista rakennetta häiritä.

Mikäli laskennassa käytetään vakioaika-askelta, tulee sen olla riittävän pieni, jotta laskenta ei kaadu. Käytettäessä suurten siirtymien teoriaa on tällaisen vakioaika-askeleen määrittäminen etukäteen kuitenkin varsin hankalaa. Käytössä on kuitenkin useita eri menetelmiä suorittaa aikaintegrointi käyttäen adaptiivista aika-askellusta [16]. Uusi aika-askel perustuu aiemman tai aiempien aika-askeleiden virhearviointiin.

#### 4.4 Hydromekaanisen laskentamallin ratkaiseminen

Tavallisesti kytketyt hydro-mekaaniset järjestelmät ratkaistaan hajautetusti [5], [18] siten, että ensin ratkaistaan esim. hydraulinen järjestelmä ja näitä ratkaisutuloksia apuna käyttäen ratkaistaan mekaaninen järjestelmä. Tätä iterointia voidaan jatkaa, kunnes tietty konvergenssikriteeri täyttyy. Yleisesti ottaen tämä iterointi on vain ehdollisesti stabiili, ts. stabiilisuus täyttyy riittävän pienellä aika-askeleella [9]. Lisäksi on kehitetty tietyille hajautetulle järjestelmille (virtausaine-rakenne) ratkaisualgoritmeja, jotka ovat ehdoitta stabiileja, mutta vaativat huomattavan paljon ylimääräistä laskentaa.

Tässä työssä kytketty hydromekaaninen tehtävä ratkaistaan yhtenäisenä eli monoliittisena järjestelmänä, jonka etuina verrattuna hajautettuun järjestelmään on yksinkertaisuus, numeerinen stabiilisuus ja laskentatehokkuus [13]. Yksinkertaisuus siinä mielessä, että yksi järjestelmä on helpommin ratkaistavissa kuin kaksi erillistä kytkettyä järjestelmää. Yhtenäisenä järjestelmänä tehtävä ratkaisu ei missään nimessä estä rinnakkaislaskennan käyttöä. Yhtenäisen stabiilin järjestelmän aikaintegrointi on numeerisesti ehdoitta stabiili, jos aikaintegrointialgoritmi on ehdoitta stabiili. Näin asian laita ei ole hajautetulle järjestelmälle. Hydromekaanisen systeemin vasteen ratkaisemiseksi laskentamallin liikeyhtälöt järjestetään taas joukoksi ensimmäisen kertaluvun tavallisia differentiaaliyhtälöitä. Tätä varten tilamuuttujaksi valitaan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{hyd}} \\ \mathbf{x}_{\text{cyl}} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (191)$$

missä  $\mathbf{x}_{\text{hyd}}$  sisältää hydraulijärjestelmän ajan suhteen muuttuvat suureet ja  $\mathbf{x}_{\text{cyl}}$  vastaavasti hydraulisyntereiden suureet. Liikeyhtälöistä sekä hydraulijärjestelmän suureista saadaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{I} & & \\ & & \mathbf{I} & \\ & & & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{\text{hyd}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{cyl}} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{hyd}}(t, \mathbf{x}_{\text{hyd}}, \mathbf{x}_{\text{cyl}}) \\ \mathbf{f}_{\text{cyl}}(\mathbf{x}_{\text{hyd}}, \mathbf{x}_{\text{cyl}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_{\text{cent}} \end{bmatrix} \quad (192)$$

Differentiaaliyhtälöryhmä (192) tunnetulla tilamuuttujan alkuarvolla on taas yhtälön (185) mukaisessa standardimuodossa ja se voidaan ratkaista vastaavasti kuin mekaanisen laskentamallin dynamiikka. Systemiyhtälöiden Jacobin matriisi on

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{hh} & \mathbf{J}_{hc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{ch} & \mathbf{J}_{cc} & \mathbf{J}_{cu} & \mathbf{J}_{cv} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{\text{int}} & -\mathbf{K}_t & -\mathbf{C}_t \end{bmatrix} \quad (193)$$

missä eri osittaisderivaatat on merkitty symbolisesti J-kirjaimella ja alaindeksillä, joka viittaa ko. vuorovaikutukseen. Mikäli taas halutaan hyödyntää matriisin ( $\mathbf{A} - h\gamma\mathbf{J}$ ) harva rakenne, tulee vektori  $\mathbf{k}_i$  jakaa neljään osaan.

# 5. Ohjelmointi

## 5.1 Työkalut

Laskentaohjelma toteutettiin pääosin Microsoft Visual Basic -ohjelmointikieltä käyttäen. Aikakriittisimmät matriisioperaatiot on käännetty Visual C -ohjelmointikielellä sekä muut aikaa vievät laskentaosiot joko Fortran- tai Power Basic -ohjelmointikielellä.

Mallitaulukko, johon laskentamallin eri osien mittatiedot syötetään, toteutettiin kaupallista Formula One- OCX-tilukkolaskentakontrollia käyttäen. Kontrollilla voidaan lukea Excel-tilukkolaskentaohjelmalla tehtyjä taulukoita ja käsitellä niitä sovellusohjelmassa.

Kolmiulotteisessa mallinnuksessa ja työkoneen visualisoinnissa käytettiin kaupallista HOOPS -ohjelmakirjastoa [12].

Ohjelmoinnissa hyödynnettiin olio-ohjelmoinnin piirteitä, silloin kun se ohjelmoijan mielestä oli luontevaa ja käytetty ohjelmointikieli tuki sitä.

### 5.1.1 Olio-ohjelmointi

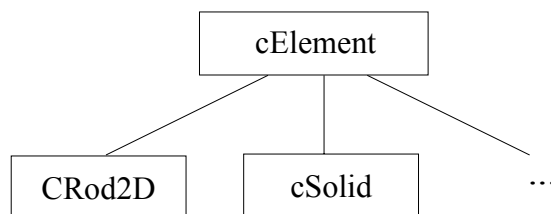
Olio-ohjelmoinnin käyttö tietokoneohjelmoinnissa laajentaa ja parantaa mahdollisuuksia reaali maailman objektien kuvaukseen tietokoneella. Suurimpana erona perinteiseen ohjelmointiin on, että oliot määrittelevät tarkat rajapinnat, joiden välityksellä ne kommunikoivat ohjelman muiden osien kanssa. Näiden rajapintojen suunnitteluun on syytä kiinnittää erityistä huomiota, koska niitä ei ole tarkoitus muuttaa ohjelmoinnin edetessä. Se, mitä tapahtuu olion rajapinnan sisällä on olion itsensä asia, ja tätä voi ohjelmoinnin edetessä helposti muuttaa. Edelleen oliot pitävät sisällään kaikki niihin liittyvät määrittelyt, metodit sekä attribuutit.

### 5.1.2 Olio ja luokka

Jotta olioita voi määritellä ohjelmaan, tulee niiden käyttäytyminen esitellä luokkamäärittelyssä. Olioön liittyy metodeja (jäsenfunktio) ja attribuutteja sekä mahdollisia kuvauksia ohjelman objektien välisiin suhteisiin. Elementtimenetelmäohjelmiston ohjelmoinnissa luontevia objekteja voisivat olla esim: pisteet, viivat, geometria, FEM-malli, elementit jne. Viivat-olio voisi koostua joukosta viivaolioita ja sillä voisi olla metodina CreateArc, joka lisää viivat-joukkoon uuden viivan, joka on ympyrän kaari. Tyypillinen attribuutti voisi olla viivojen väri. Viivat-olion omistajana taas voisi olla geometria olio, jonka taas voi omistaa FEM-malli-olio.

### 5.1.3 Abstrakti luokka

Abstrakti luokka määrittelee oliot, joita ei ohjelmassa tavallisesti luoda, vaan luokat, joita luodaan, perivät abstraktin luokan määrittelyt. Käytännön esimerkkinä elementtimenetelmässä olkoon elementti. Elementtityyppjä ohjelmistossa on kymmeniä tai satoja, ja niiden luonti edellyttää kovasti erilaisia lähtötietoja sekä tilavarauksia. Tällöin olio-ohjelmoinnissa kannattaa määritellä abstrakti kuvassa 18 näkyvä luokka cElement, josta periytetään esimerkiksi elementit CSolid tai cRod2D.



*Kuva 18. Abstrakti luokka cElement ja siitä periytyvät luokat CRod2D ja Csolid.*

Olkoon sitten abstraktissa luokassa määritetty **julkinen** jäsenfunktio

```
Public Function CalcStiffnessMatrix()  
As Boolean
```

Luokassa CRod2D voisi vastaava **yksityinen** funktio olla määritelty

```
Private Function cElement_CalcStiffnessMatrix() As Boolean  
'*****  
'2D Sauvan jäykkyyismatriisi H. Marjamä-  
ki 11.10.01  
'*****  
    u21 = UrhoE(3) - UrhoE(1)  
    v21 = UrhoE(4) - UrhoE(2)  
    xn21 = e1.X + u21  
    yn21 = e1.Y + v21  
  
    l02 = L * L  
    ln2 = xn21 * xn21 + yn21 * yn21  
    Eps = C_HALF * (ln2 - l02) / l02  
'Green  
    SigmaG = RealC(m_MaterialNr).e * Eps  
    k1 = SigmaG*RealC(m_MaterialNr).a / L  
  
    LocalK(1, 1) = k0 * xn21 * xn21 + k1  
    LocalK(1, 2) = k0 * xn21 * yn21  
  
...  
End Function
```

Jos ohjelmoija nyt haluaisi luoda sauvaelementin ja laskea sen jäykkyyismatriisin, niin ohjelmakoodi voisi näyttää seuraavanlaiselta:

```
Dim Sauva as CElement 'Määr elementiksi  
Set Sauva = New CRod2D 'Määr. element.  
Sauva.CalcStiffnessMatrix 'Lasketaan  
jäykkyys
```

Oheisessa esimerkissä muuttuja Sauva määritettiin luokaksi cElement, koska vain abstraktin luokan jäsenfunktio, joka määrittelee jäykkyyismatriisin laskentafunktion, on julkinen.

### 5.1.4 Oliojoukko

Monesti ohjelmoinnissa tarvitaan joukkoa tiettyjä olioita, kuten edellä esiteltyjä elementtejä. Nykyisissä olio-ohjelmointikielissä on tähän varauduttu erityisellä joukko-oliolla (collection). Joukon perusjäsenfunktioita ovat esimerkiksi olion lisäys Add ja poisto Remove. Käyttäjä voi määritellä joukoille omia jäsenfunktioita, kuten elementtijoukolle elementin sisäisten voimien laskennan, joka taas voisi näyttää seuraavalta:

```
Public Sub GetInternalForce()  
    For Each m_Elem In mCol  
        m_Elem.CalcInternalForce  
    Next  
End Sub
```

## 5.2 Geometrian mallinnus

Elementtimenetelmäohjelmistoissa elementit luodaan ensiksi luotavaan geometriseen malliin. Geometrisen malli koostuu tavallisesti pisteistä, viivoista, pinnoista sekä tilavuuksista, joita sopivasti yhdistelemällä saadaan haluttu geometrisen malli.

### 5.2.1 Pisteet

Pisteet toimivat usein vain ohjauspisteinä monimutkaisemmalle geometrialle. Esimerkiksi käyttäjä haluaa viivan kahden pisteen välille. Parametrisessa mallinnuksessa koko muu geometria voi seurata muutamaa ohjauspistettä, jolloin mallin geometrian muuttaminen on helpompaa.



## 5.2.2 Viivat

Sauva ja palkkielementit tehdään tavallisesti viivoille. Viivojen kuvaustapoja on useita erilaisia. Tässä työssä on rajoitettu viivoihin, joiden koordinaatit kuvautuvat

$$\begin{aligned}x(t) &= \alpha_{10} + \alpha_{11}t + \alpha_{12}t^2 + \alpha_{13}t^3 \\y(t) &= \alpha_{20} + \alpha_{21}t + \alpha_{22}t^2 + \alpha_{23}t^3 \\z(t) &= \alpha_{30} + \alpha_{31}t + \alpha_{32}t^2 + \alpha_{33}t^3 \\t &\in [0,1]\end{aligned}\tag{194}$$

jolloin parametrit  $\alpha_{ij}$  määräytyvät viivan luontitavan perusteella. Viivan suunnistus määräytyy parametrin  $t$  kasvusuuntaan. Edellä esitetyllä kuvaustavalla ei saa kuvattua ympyränkaarta tarkasti.

## 5.2.3 Pinnat

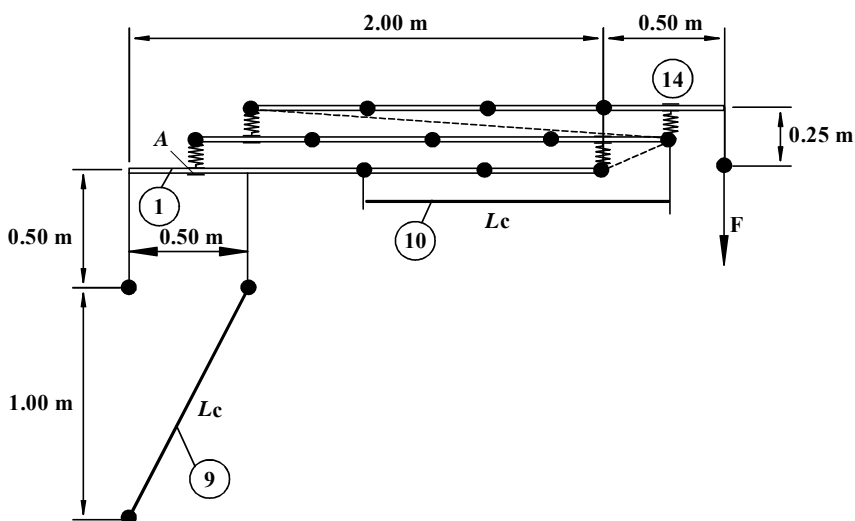
Levy ja kuorielementit generoidaan pinnoille, jotka usein luodaan viivoja apuna käyttäen esimerkiksi viivaa siirtämällä tai pyöräyttämällä. Pinnalla on kaksi vapaata parametria, joiden perusteella määräytyy pinnan ylä- ja alapuoli.

## 5.2.4 Tilavuudet

Solidielementit taas generoidaan tilavuuksiin, joita voi tehdä esimerkiksi pintaa siirtämällä tai pyöräyttämällä. Ohjelmoinnissa on syytä kiinnittää tilavuuksien suunnistukseen huomiota, jotta esimerkiksi painekuormien antaminen tilavuuden eri tahkoille onnistuu helposti.

## 6. Laskentaesimerkki

Laskentaesimerkkinä ohjelmistolla mallinnettiin kuvan 19 mukainen teleskooppipuomisto. Mallissa on kaksi teleskooppijatketta ja puomia voi nostaa ja laskea pituuttaan muuttavalla sauvaelementillä, joka kuvassa on elementti numero 9. Teleskooppi-isku saadaan aikaan pituuttaan muuttavalla sauvaelementillä numero 10. Kytöntäelementti on piirretty katkoviivalla. Selvyyden vuoksi kuvassa teleskooppipuomiston jatkeet on piirretty eri tasoon puomiin nähden, itse laskentamallissa puomijäsenet ovat samassa tasossa.



Kuva 19. Joustavan teleskooppipuomiston laskentamalli.

Laskentaesimerkissä muuttuvapituinen sauvaelementti numero 9, joka kuvaa nostosylinteriä, muuttaa pituuttaan lineaarisesti 5 sekunnin aikana alkupituudesta loppupituuteensa. Samanaikaisesti muuttuvapituinen sauvaelementti numero 10 muuttaa pituuttaan niin, että koko teleskooppi-isku (1,5 m) tapahtuu liikkeen aikana. Oman painon kuormituksen lisäksi uloimman puomin päässä on 40 000 N kuormitus,  $F$ , joka kuvaa puomiston ulkoista kuormaa. Laskentamalliin on lisätty vaimennusmatriisi kuvaamaan liikkeen aikana syntyvää dissipatioenergiaa. Vaimennusmalli perustuu Rayleighin vaimennukseen.

Rosenbrock-W-aikaintegroinnissa käytetyt parametrit on koottu taulukkoon 1 ja taulukkoon 2 on koottu teleskooppipuomin lähtöarvot.

*Taulukko 1. Rosenbrock-W-integroinnissa käytetyt parametrit.*

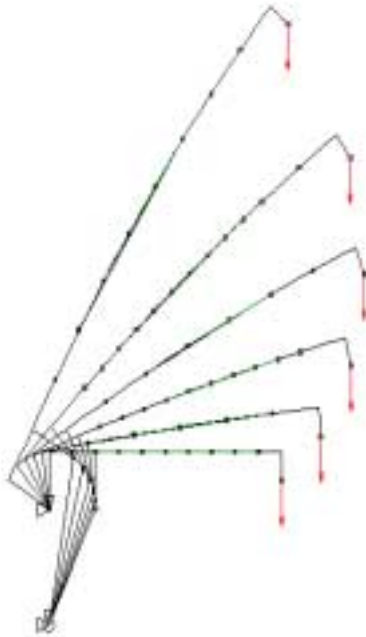
Parametri	Arvo
$\alpha_1$	0
$\alpha_2$	$\frac{1}{2}$
$[\alpha_{ij}]$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$
$\gamma$	$1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\gamma_1$	$\gamma$
$\gamma_2$	0
$[\gamma_{ij}]$	$\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ -\gamma & \gamma \end{bmatrix}$

*Taulukko 2. Teleskooppipuomille annetut lähtöarvot.*

Suure	Arvo	Yks.
Kimmomoduli	210	GPa
$GA_s$	EA	Pa
Elementtien lukumäärä	4	kpl
Köyden pinta-ala	0.001	$m^2$
Elementtien 9 ja 10 pinta-ala	0.001	$m^2$
Puomin 1 pinta-ala	0.00234	$m^2$
Puomin 2 pinta-ala	0.00186	$m^2$
Puomin 3 pinta-ala	0.00116	$m^2$
Köyden massan pituustiheys	20	kg/m
Elem. 9 ja 10 massan pituustiheys	20	kg/m
Puomin 1 massan pituustiheys	18.00	kg/m
Puomin 2 massan pituustiheys	14.60	kg/m
Puomin 3 massan pituustiheys	9.14	kg/m
Puomin 1 neliömomentti	$12.4 \cdot 10^{-6}$	$m^4$
Puomin 2 neliömomentti	$6.24 \cdot 10^{-6}$	$m^4$
Puomin 3 neliömomentti	$2.89 \cdot 10^{-6}$	$m^4$
Elementin 9 loppupituus	1.48	m
Elementin 10 loppupituus	2.00	m
Puomiston alkupituus	2.50	m
Teleskooppi-isku	1.50	m
Rayleigh vaimennusparametri, $\alpha$	0.1	
Rayleigh vaimennusparametri, $\beta$	0.0	

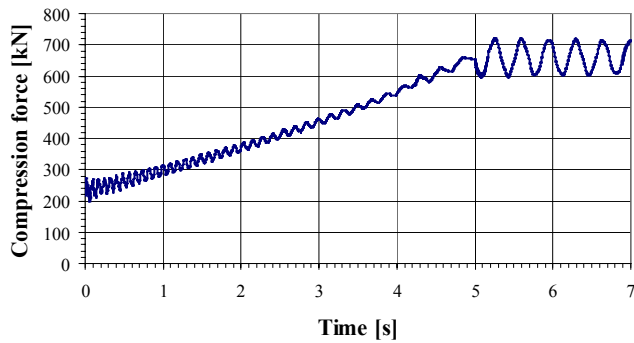
## 7. Tulokset

Laskentamalli aikaintegroitiin vakioaika-askeleella,  $h = 0,001$  s. Kuvassa 20 on esitetty puomiston siirtymäkenttä laskettuna sekunnin välein.



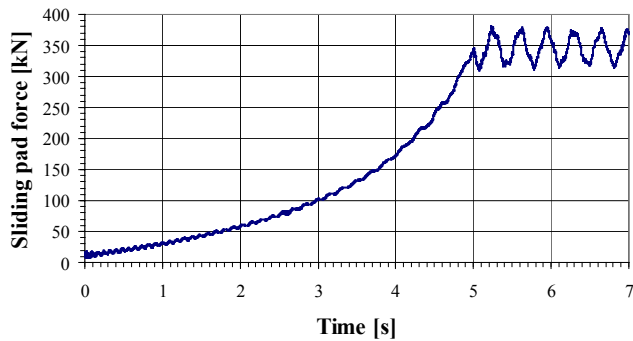
*Kuva 20. Puomiston siirtymäkenttä sekunnin välein.*

Laskennan aikana kerättiin elementin numero 9 puristusvoimaa, joka vastaa nostosylinteriin vaikuttavaa voimaa. Puristusvoima on esitetty kuvassa 21.



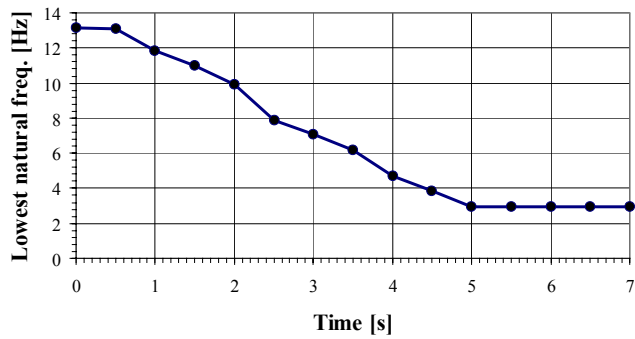
*Kuva 21. Elementin 9 puristusvoima laskenta-ajan funktiona.*

Laskentajakson aikana kerättiin myös ensimmäisen puomin liukupalavoima. Kuvassa 22 liukupalavoima on esitetty laskenta-ajan funktiona.



*Kuva 22. Ensimmäisen puomin liukupalavoima (A).*

Laskentamalli on jäykkä eli sillä on matalat taivutusjäykkyyteen liittyvät ominaistajuudet ja korkeat puristusjäykkyyteen liittyvät taajuudet. Kuvassa 23 on esitetty alin ominaistajuus 0,5 sekunnin välein. Mallin ylin ominaistajuus 5,5 kHz pysyy vakiona koko laskenta-ajan.



*Kuva 23. Laskentamallin alin ominaistajuus laskettuna 0,5 sekunnin välein.*

Edellä esitetty laskentaesimerkki kuvaa tyypillistä hydraulikäyttöistä teleskoopipuumistoa. Käytetty laskentamenetelmä johtaa tavalliseen differentiaaliyhtälöryhmään minimimäärällä vapausasteita. Tämä nopeuttaa huomattavasti laskentaa ja mahdollistaa jopa nostotilanteen reaaliaikaisen simuloinnin.

## 8. Verifiointi

Ohjelmiston kehitys alkoi vuonna 1984 nostureiden tyyppitarkastukseen liittyvien lujuus- ja vakavuuslaskelmien tarkastuksen yhteydessä. Näiltä vuosilta on jäljellä joitakin kirjallisia dokumentteja koskien lähinnä nurjahduslaskentaa sekä korvakkeiden laskentaa.

Systemaattisemmin verifiointia on käsitelty ensimmäistä kertaa kirjoittajan diplomityössä 1995. Ensimmäinen ulkopuolisen toimesta tehty verifiointi toteutettiin teknillisen mekaniikan erityistyönä *FEM 30 -ohjelmiston verifiointi* vuonna 2001, jonka toteutti tutkimusharjoittelija Mirve Liius.

### 8.1 Verifiointiongelman esitystapa

Tavoitteena on, että kehitetty ohjelmisto täyttää lähteen [17] vaatimukset lähitulevaisuudessa. Tästä syystä uusien osioiden verifiointiin on suunnitteilla uusi verifiointikäsikirja. Siinä käsitellään kyseessä olevaa verifiointiongelmaa seuraavasti:

*Otsikko*

Verifiointiongelmaa kuvaava nimi.

*Ongelma*

Lyhyt kuvaus ratkastavasta ongelmasta sekä ratkaistavista suureista.

*Ominaisuudet*

Kuvaus käytetyistä materiaalivakioista ja parametreista.

*Elementtityyppi*

Ongelman ratkaisuun käytettävän elementin/elementtien kuvaus.

### *Mallinnus*

Kuvaus geometrian luomisesta, elementtien määrästä, reunaehdoista ja kuormista.

### *Tulosten vertailu*

Ohjelman antamien tuloksien vertailu lähdeaineiston antamiin tuloksiin.

### *Viitteet*

Luettelo lähdeaineistosta, johon ohjelmalla laskettuja tuloksia verrataan.

### *Dokumentointi*

Mihin verifiointitehtävään liittyvä dokumentaatio on arkistoitu.

## **8.2 Verifiointiesimerkki**

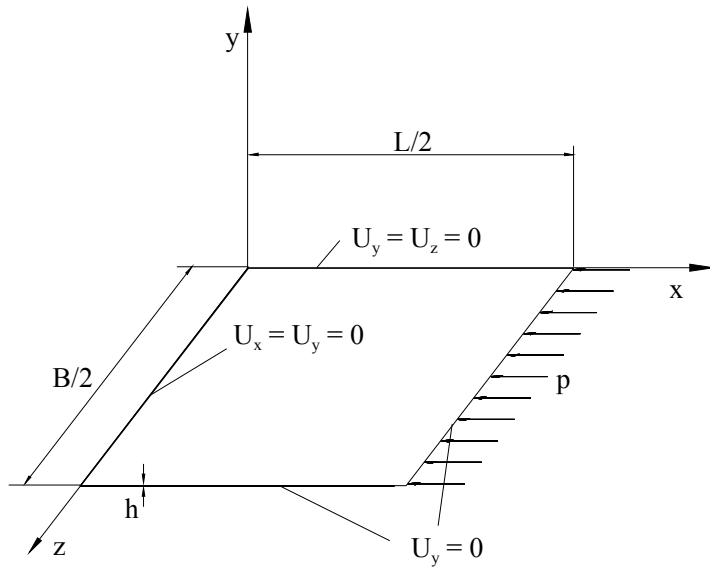
### *Otsikko*

Tasaisesti puristetun niveltuetun levykentän lommahdus.

### *Ongelma*

Tarkastellaan kuvan 24 mukaista levyrakennetta. Symmetriasyistä kuvassa on mallinnettu vain levyn neljännes. Verifioitavana suurena tarkastetaan rakenteen lineaarisen stabiilisuusanalyysin mukaan laskettu kuormituskerroin.





Kuva 24. Periaatekuva puristetusta levyrakenteesta.

### *Mallinnus*

Mallinnetaan rakenne 20-solmuista solidielementtiä käyttäen. Paksuussuunnassa käytetään yhtä elementtiä. Tehtävän kaksoissymmetria hyödynnetään laskentamallissa.

### *Elementtityyppi*

Nro	Elementti	Elem. nro.	Vap.asteet
1	Solid20	62	$U_x, U_y, U_z$

### *Ominaisuudet*

Nro	Selite	Suure	Arvo	Yksikkö	Elementit
1	Kimmokerr.	E	206000	MPa	kaikki
2	Poisson luku	$\nu$	0.3		kaikki

### *Tulosten vertailu*

Vertailulaskenta tehtiin soveltamalla standardia SFS 4025. Taulukossa selitesarakeessa on elementtien määrä levyn neljänneksessä pituus- ja leveysuunnassa.

Nro	Selite	Suure	Ohjelma
1	2 * 2	$\lambda$	9.941
2	3 * 3	$\lambda$	5.149
3	4 * 4	$\lambda$	4.763
4	6 * 6	$\lambda$	4.676
5	8 * 8	$\lambda$	4.664
6	12 * 12	$\lambda$	4.657
7	Analyyttinen	$\lambda$	4.655

Elementtiverkon tihentyessä ohjelmalla lasketut tulokset lähestyvät analyttistä ratkaisua ylhäältäpäin.

### *Viitteet*

Analyttinen ratkaisu on standardista SFS 4025. Nosturien ja nosturiratojen laskentaohjeet. Rakenneosien laskenta nurjahdukseen ja lommahdukseen nähdän. 01.12.1980.

### *Dokumentointi*

Verifioitavan ohjelmiston malli on tallennettu hakemistoon:

`\FEM_Models\Verifointi\VER_Buck.xls`

## 9. Yhteenveto

Tutkimuksessa selvitettiin elementtimenetelmän soveltamista erilaisten työkonoiden kaatumisvakavuuden selvittämiseen sekä kantavien rakenteiden analysointiin. Hankkeessa laadittiin myös ohjelmisto, jolla voidaan analysoida työkonoiden rakenteita. Ohjelmistolla voidaan tehdä myös työkonoiden vakavuus-tarkasteluja.

Itse ohjelmisto toteutettiin käyttäen perinteisiä ohjelmointikieliä. Laitteen parametrinen geometria, kuormitukset, osien massat ja muut lähtöarvotiedot syötetään käyttäen kaupallista taulukkolaskentakontrollia. Kolmiulotteinen mallinnus ja työkonoiden visualisointi toteutettiin käyttäen kaupallista ohjelmakirjastoa.

Koska lähdekirjallisuudesta ei sellaisenaan löydy työssä käytettyjä elementtejä eikä laskentamenetelmää, on raportissa esitetty jossain määrin myös laskennassa käytettäviä elementtejä ja menetelmää yleisesti. Elementeistä esitellään sauva-, palkki-, levy-, kuori- ja solidielementtien lisäksi offset-, kytkentä- ja liukujousipalkkielementti. Lisäksi käsitellään lyhyesti hydraulijärjestelmän mallinnusta. Ratkaisualgoritmeista esitellään statiikan, lineaarisen stabiilisuusteorian, dynamiikan sekä hydromekaanisen dynamiikan ratkaisijoiden periaatteet. Koska epälineaarisen dynamiikan laskentamallista syntyvä differentiaaliyhtälöryhmä ratkaistaan ilman algebrallisia sidosehtoja, niin ratkaisualgoritmit saadaan verrattain nopea. Lisäksi hydraulisylintereiden vaikutukset kokonaisjousto- saadaan mallinnettua suoraan.

Kehitetty laskentaohjelmisto on otettu suunnittelukäyttöön yhteistyöyrityksissä. Lisäksi ohjelmalla saatavia laskentatuloksia on vertailtu lukuisiin työkonoiden mittaamalla saatuihin tuloksiin. Laskentaohjelmaan perehtyneet ovat pitäneet sitä helppokäyttöisenä ja erityisesti samaan tuoteperheeseen kuuluvan työkonoiden laskenta on nopeutunut huomattavasti. Ohjelmiston käytöllä on voitu vähentää laskentaan liittyvää rutiiniväsymystä, jolloin laskennan virhemahdollisuudet ovat pienentyneet. Edelleen ohjelmalla voidaan tarkastella työkonoiden asentaja, joita perinteisessä laskennassa ei ole laskennan raskauden vuoksi tarkasteltu. Ohjelmiston käytöllä on suunnittelutyön laatu parantunut, suunnittelukustannukset ovat pienentyneet ja laitteiden käyttöturvallisuus parantunut. Simulaatiotuloksia voidaan käyttää esimerkiksi käyttölujuustarkastelujen pohjana. Edelleen tuloksia

voidaan käyttää reuna- ja alkuehtoina mallinnettaessa koneen jokin yksityiskohta tarkemmin.

Pyörillä liikkuvan työkoneen renkailla on oleellinen vaikutus sen kaatumisvakavuuteen. Valmistajilla ei ole kuitenkaan käytettävissä luotettavia arvoja renkaiden jousto- ja vaimennusominaisuuksista. Tästä syystä hankkeessa laadittiin työkoneen renkaan matemaattinen malli, joka perustuu solidielementtien käyttöön. Laskentamallilla voidaan selvittää renkaan jäykkyys- ja vaimennusominaisuuksia ottaen huomioon renkaan rakenteellinen ortotropia (kumit, koordit, vyöt ja kaapeli). Työkoneiden lujuus- ja seisontavakavuuslaskennassa renkaan solidielementteihin perustuva laskentamalli voidaan korvata erilaisilla yksinkertaistetuilla elementeillä.

Suurten siirtymien elementeillä voidaan tehdä muun muassa jäykistetyn kotelo-  
puomin tarkempi kuormitus/siirtymäanalyysi sekä erilaisia työkoneen rakennesien stabiliteettitarkasteluja.

Jatkotutkimuksena rakenteiden lujuustarkasteluja voidaan laajentaa vaurioanalyysiin ottamalla huomioon materiaalin kimmoplastinen konstitutiivinen yhteys. Edelleen palkkirakenteiden tutkimuksessa voisi tarkastella erilaisia tapoja kuvata estettyä vääntöä, jolloin esimerkiksi ajoneuvojen päällerakenteita voisi analysoida tarkemmin. Liuku-jousipalkkielementtiä voisi kehittää siten, että liukujousella on  $C_1$ -jatkuva liukupinta.  $C_1$ -jatkuva kuvaus lisäisi laskennan konvergenssia erityisesti staattisissa analyysissä. Hydraulisyntereiden osalta kiinnostusta on herättänyt mm. sylinterin päätyasennon vaimennuksen mallinnus.

## Lähdeluettelo

1. Ahmad, S., Irons, B. M., & Zienkiewicz, O. C. (1970), Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, 419–451.
2. Bathe, K.J. (1996), *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall Inc, New Jersey. 1039 s.
3. Behdinan, K., Stylianou, M.C., & Tabarrok, B. (1998), Co-rotational dynamic analysis of flexible beams, *Computer Methods Appl. Mech. Engrg*; 154:151–161.
4. Bonet, J. & Wood, R. D. (1997), *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
5. Cardona, A. & Géradin, M. (1990), Modeling of a Hydraulic Actuator in Flexible Machine Dynamics Simulation, *Mechanism and Machine Theory*, 25, No 2, s. 193–207.
6. Cardona, A., Géradin, M., & Doan, D.B. (1991), Rigid and flexible joint modelling in multibody dynamics using finite elements, *Computer Methods Appl. Mech. Engrg*; 89:395–418.
7. Crisfield, M.A. (1991), *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 1: Essentials, J. Wiley & Sons, New York. 345 s.
8. Crisfield, M.A. (1997), *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 2: Advanced Topics, J. Wiley & Sons, New York. 494 s.
9. Géradin, M. & Cardona, A. (2001), *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach*, J. Wiley & Sons, New York. 327 s.
10. Hairer, E. & Wanner, G. (1991), *Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer Series in Computational Mathematics 14, Springer-Verlag, Berlin. 601 s.

11. Jelenic, G. & Crisfield, M.A. (1996), Non-linear 'master-slave' relationship for joints in 3-D beams with large rotations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*; 135:211–228.
12. Leley, W. & Merry, J. (1996), *3D with HOOPS*, Addison-Wesley Longman Inc. Reading, Massachuttes. 523 s.
13. Lewis, W. P. Bettess & E. Hinton, (1984), *Numerical Methods in Coupled Systems*, John Wiley & Sons, Chichester. 618 s.
14. Mäkinen, J., Piché, R. & Ellman, A. (2000), Fluid Transmission Line Modeling Using a Variational Method, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*; 122:153–162.
15. Piché, R. (1995), An L-stable Rosenbrock method for step-by-step time integration in structural dynamics, *Computer Methods in Applied Mech. Engrg*; 126: 343–354.
16. Piché, R. & Nevalainen, P. (1999), Variable Step Rosenbrock Algorithm for Transient Response of Damped Structures, *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*, 213, 191–198.
17. SFS-EN ISO/IEC 17025 21.08.2000. Testaus- ja kalibrointilaboratorioiden pätevyys. Yleiset vaatimukset. Helsinki, Suomen standardisoimisliitto. 46 s.
18. Shabana, A. (1989), *Dynamics of Multibody Systems*, John Wiley & Sons. 470 s.
19. Simo, J.C. & Vu-Quoc, L. (1986), On the dynamic of flexible beams under large overall motions – The plane case: Part I and II, *ASME Journal of Applied Mechanics*; 53:849–863.
20. Simo, J.C. & Vu-Quoc, L. (1987), The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures, *J. Sound and Vibration*; 119(3):487–508.

21. Wehage, R.A. & Haug, E.J. (1982), Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems, ASME Journal of Mechanical Design; 104:247–255.
22. Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (1998), The finite element method. Fourth Edition. Volume 2, Mc Graw-Hill, Bergshire. 807 s.





## Liite B: Kolmiulotteisen muuttuvapoikkileikkauksisen palkin massamatriisi

$$\mathbf{m} = \rho \left( \int_L AN_z^T N_z dL + \int_L AN_y^T N_y dL + \int_L AN_p^T N_p dL + \int_L I_p N_t^T N_t dL \right)$$

B1

$$\frac{\rho L}{840} \begin{bmatrix} 70(3A_1 + A_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70(A_1 + A_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24(10A_1 + 3A_2) & 0 & 0 & 0 & 2(15A_1 + 7A_2)L & 0 & 54(A_1 + A_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & -2(7A_1 + 6A_2)L \\ & 24(10A_1 + 3A_2) & 0 & -2(15A_1 + 7A_2)L & 0 & 0 & 0 & 54(A_1 + A_2) & 0 & 2(7A_1 + 6A_2)L & 0 & 0 \\ & & 70(I_{\rho 1} + I_{\rho 2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70(I_{\rho 1} + I_{\rho 2}) & 0 & 0 & 0 \\ & & & (5A_1 + 3A_2)L^2 & 0 & 0 & -2(6A_1 + 7A_2)L & 0 & -3(A_1 + A_2)L^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho L}{840} & & & & (5A_1 + 3A_2)L^2 & 0 & 2(6A_1 + 7A_2)L & 0 & 0 & 0 & -3(A_1 + A_2)L^2 & 0 \\ & & & & & 70(A_1 + 3A_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 24(3A_1 + 10A_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & -2(7A_1 + 15A_2)L \\ & & & & & & & 24(3A_1 + 10A_2) & 0 & 2(7A_1 + 15A_2)L & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 70(I_{\rho 1} + 3I_{\rho 2}) & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 3(A_1 + 5A_2)L^2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 3(A_1 + 5A_2)L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

*symm.*

Tekijä(t) Marjamäki, Heikki			
Nimeke <b>Siirtymäperusteisen elementtimenetelmäohjelmiston suunnittelu ja ohjelmointi</b>			
Tiivistelmä Julkaisussa esitetään siirtymäperusteisen elementtimenetelmäohjelmiston teoreettista taustaa. Siinä on esitetty laskennassa käytettäviä elementtejä ja menetelmää yleisesti. Elementteistä esitellään sauva-, palkki-, levy-, kuori- ja solidielementtien lisäksi offset-, kytKentä- ja liuku-jousipalkkielementti. Lisäksi käsitellään lyhyesti hydraulijärjestelmän mallinnusta. Ratkaisualgoritmeista esitellään statiikan, lineaarisen stabiilisuusteorian, dynamiikan sekä hydromekaanisen dynamiikan ratkaisijoiden periaatteet. Koska epälineaarisen dynamiikan laskentamallista syntyvä differentiaaliyhtälöryhmä ratkaistaan ilman algebrallisia sidosheitoja, niin ratkaisualgoritmista on saatu verrattain nopea. Lisäksi hydraulisyntereiden vaikutukset kokonaisjoustoon saadaan mallinnettua suoraan.  Työn yhteydessä laadittiin elementtimenetelmäohjelmisto, jolla voidaan analysoida työkonoiden rakenteita sekä tehdä työkonoiden vakavuustarkasteluja. Julkaisussa on kuvattu lyhyesti myös ohjelmiston rakennetta.			
Avainsanat finite element method, finite element analysis, calculations, displacement, design, working machines, stability, strength, structural analysis, computer software, models, computer programs			
Toimintayksikkö VTT Tuotteet ja tuotanto, Tekniikankatu 1, PL 1307, 33101 TAMPERE			
ISBN 951-38-6231-3 (nid.) 951-38-6232-1 (URL: <a href="http://www.vtt.fi/inf/pdf/">http://www.vtt.fi/inf/pdf/</a> )		Projektinumero A0SU00148	
Julkaisu-aika Heinäkuu 2003	Kieli Suomi, engl. tiiv.	Sivuja 102 s. + liitt. 2 s.	Hinta C
Projektin nimi Elementtimenetelmän soveltaminen työkonoiden turvallisuuskriittisiin laskelmiin		Toimeksiantaja(t) Työsuojelurahasto (TSR), VTT, työkonvalmistajat	
Avainnimeke ja ISSN VTT Publications 1235-0621 (nid.) 1455-0849 (URL: <a href="http://www.vtt.fi/inf/pdf/">http://www.vtt.fi/inf/pdf/</a> )		Myynti: VTT Tietopalvelu PL 2000, 02044 VTT Puh. (09) 456 4404 Faksi (09) 456 4374	

Author(s) Marjamäki, Heikki			
Title <b>The design and programming of displacement based finite element software</b>			
Abstract In this research, the use of the finite element analysis in calculation of stability and the strength of working machines was studied. Also a computer software for structural analysis was developed. The strength and stability calculations are based on the two- and three-dimensional non-linear finite element analysis.  The theoretical background of different elements used in calculation are presented as well as some finite element theory in general. The rod-, beam-, plate-, shell- and solid elements as well as offset-, connector- and slide-spring beam elements are introduced. Also the modelling of hydraulic system is briefly covered.  The computer aided stability and strength calculation software is especially helpful when designing working machines. Due to its ease of use for end users more calculation cases can be studied. Also, more reliable and accurate calculation results are obtained. The software will, therefore, certainly increase the safety level and efficiency in designing working machines. Additionally, it can be integrated with the internal practices of the design company.			
Keywords finite element method, finite element analysis, calculations, displacement, design, working machines, stability, strength, structural analysis, computer software, models, computer programs			
Activity unit VTT Industrial Systems, Tekniikankatu 1, P.O.Box 1307, FIN-33101 TAMPERE, Finland			
ISBN 951-38-6231-3 (soft back ed.) 951-38-6232-1 (URL: <a href="http://www.vtt.fi/inf/pdf/">http://www.vtt.fi/inf/pdf/</a> )		Project number AOSU00148	
Date July 2003	Language Finnish, Engl. abstr.	Pages 102 p. + app. 2 p.	Price C
Name of project The adaption of finite element analysis for safety critical calculations of construction machines		Commissioned by The Finnish Work Environment Fund (TSR), VTT, construction machine manufacturers	
Series title and ISSN VTT Publications 1235-0621 (soft back ed.) 1455-0849 (URL: <a href="http://www.vtt.fi/inf/pdf/">http://www.vtt.fi/inf/pdf/</a> )		Sold by VTT Information Service P.O.Box 2000, FIN-02044 VTT, Finland Phone internat. +358 9 456 4404 Fax +358 9 456 4374	

Julkaisussa esitetään siirtymäperusteisen elementtimenetelmäohjelmiston teoreettista taustaa. Siinä on esitetty laskennassa käytettäviä elementtejä ja menetelmää yleisesti. Elementeistä esitellään sauva-, palkki-, levy-, kuori- ja solidielementtien lisäksi offset-, kytkentä- ja liuku-jousipalkkielementti. Lisäksi käsitellään lyhyesti hydraulijärjestelmän mallinnusta. Ratkaisualgoritmeista esitellään statiikan, lineaarisen stabiilisuusteorian, dynamiikan sekä hydromekaanisen dynamiikan ratkaisijoiden periaatteet.

Työn yhteydessä laadittiin elementtimenetelmäohjelmisto, jolla voidaan analysoida työkoneiden rakenteita sekä tehdä työkoneiden vakavuustarkasteluja. Julkaisussa on kuvattu lyhyesti myös ohjelmiston rakennetta.

---

Tätä julkaisua myy  
VTT TIETOPALVELU  
PL 2000  
02044 VTT  
Puh. (09) 456 4404  
Faksi (09) 456 4374

Denna publikation säljs av  
VTT INFORMATIONSTJÄNST  
PB 2000  
02044 VTT  
Tel. (09) 456 4404  
Fax (09) 456 4374

This publication is available from  
VTT INFORMATION SERVICE  
P.O.Box 2000  
FIN-02044 VTT, Finland  
Phone internat. +358 9 456 4404  
Fax +358 9 456 4374

---

ISBN 951-38-6231-3 (soft back ed.)  
ISSN 1235-0621 (soft back ed.)

ISBN 951-38-6232-1 (URL: <http://www.vtt.fi/inf/pdf/>)  
ISSN 1455-0849 (URL: <http://www.vtt.fi/inf/pdf/>)