

Säteilylämmönsiirron laskennasta

Kari Ikonen

Säteilylämmönsiirron laskennasta

Kari Ikonen

ISBN 978-951-38-8043-9 (nid.)
ISBN 978-951-38-8044-6 (URL: <http://www.vtt.fi/publications/index.jsp>)

VTT Technology 116

ISSN-L 2242-1211
ISSN 2242-1211 (painettu)
ISSN 2242-122X (verkkojulkaisu)

Copyright © VTT 2013

JULKAISIJA – UTGIVARE – PUBLISHER

VTT
PL 1000 (Tekniikantie 4 A, Espoo)
02044 VTT
Puh. 020 722 111, faksi 020 722 7001

VTT
PB 1000 (Teknikvägen 4 A, Esbo)
FI-02044 VTT
Tfn +358 20 722 111, telefax +358 20 722 7001

VTT Technical Research Centre of Finland
P.O. Box 1000 (Tekniikantie 4 A, Espoo)
FI-02044 VTT, Finland
Tel. +358 20 722 111, fax + 358 20 722 7001

Säteilylämmönsiirron laskennasta

Analysis of thermal radiation. **Kari ikonen**. Espoo 2013. VTT Technology 116. 74 s. + liitt. 8 s.

Tiivistelmä

Julkaisu käsittelee säteilylämmönsiirron teoriaa, näkyvyyskertoimien määrittämistä ja säteilylämmönsiirron kytkemistä lämmönjohtumisen laskentaan kontrollitilavuusmenetelmällä. Lämpötilan noustessa riittävän korkeaksi säteilylämmönsiirto tulee usein hallitsevaksi lämmönsiirtomekanismiksi lämmön johtumiseen ja kuljetukseen verrattuna. Rakenteiden lämpötilan ja edelleen lujuuden määrittämistä varten lämpösäteilyn vaikutus on tarpeen kytkeä rakenteiden lämpenemisen määrittäminen. Julkaisussa esitetään toisiinsa kytkeytyvien lämmön johtumisen ja säteilylämmönsiirron samanaikainen tarkastelu kontrollitilavuusmenetelmää sovellettaessa.

Kehitettyjä valmiuksia voidaan soveltaa käytetyn polttoaineen jäähtymisanalyysiin, joissa polttoaineen jäähdytys tapahtuu kaasumaisessa ympäristössä, käytetyn polttoaineen vesiallasvarastoinnin analyysiin ja loppusijoitusanalyysiin sekä mahdollisesti ydinreaktorin seisokin aikaisten onnettomuustilanteiden tarkasteluihin. Julkaisussa on lukuisia esimerkkejä teorian ja laskentaprosessien selvittämisiksi.

Asiasanat

Thermal radiation, view factor, radiosity, repository, control volume method

Analysis of thermal radiation

Säteilylämmönsiirron laskennasta. **Kari Ikonen**. Espoo 2013. VTT Technology 116. 74 p. + app. 8 p.

Abstract

The publication deals with theory of thermal radiation and computation of view factors and combination of thermal radiation to calculation process of thermal heat transfer of structures. At high temperature thermal radiation becomes a dominant heat transfer mechanism in comparison to conduction and convection. For estimation of the temperature and further strength of structures, simultaneous management of thermal radiation and thermal conduction is needed. The publication presents this combination, when applying control volume method.

In this report calculation methods and development work performed at VTT related to thermal radiation are documented. This work is funded by VTT. The development expertise and computer programs can be used in analyzing temperature inside nuclear fuel transport container when fuel element in gaseous atmosphere or in interim spent fuel storage in postulated accident cases, in repositories for final disposal or possibly in accident cases during revision outage of a nuclear reactor. There are a lot of examples for illustration of the theory and the calculation processes.

Keywords Thermal radiation, view factor, radiosity, repository, control volume method

Esipuhe

Ydinvoiman käytön yhteydessä turvallisuusnäkökohdilla on poikkeuksellisen suuri merkitys. Mahdolliset onnettomuudet tulee pyrkiä estämään kaikin keinoin. Onnettomuustilanteilta ei kuitenkaan voida täysin välttyä ja niihin tulee varautua. Onnettomuuksissa on kyse usein siitä, että ydinpolttoaine pääsee kuumenemaan liiaksi jäähdytyksen epäonnistuessa. Lämpötilan noustessa riittävän korkeaksi säteilylämmönsiirto tulee hallitsevaksi lämmönsiirtomekanismiksi lämmön johtumiseen ja kuljettumiseen verrattuna. Siten on perusteltua lisätä tietämystä säteilylämmönsiirrosta ja kehittää laskentamenetelmiä. Tämän julkaisun tarkoitus on osaltaan edistää aihepiiriin liittyvää osaamista.

Lämpösäteilyn laskentaa monimutkaisissa geometrioissa alettiin kehittää VTT:llä vuonna 2006 arvioitaessa polttoaineen lämpötiloja käytetyn polttoaineen loppusijoituskapselin sisällä. Myöhemmin säteilylämmönsiirron laskenta on tullut esille käytetyn ydinpolttoaineen vesiallasvarastojen onnettomuusanalyysissä. Julkaisun tarkoitus on dokumentoida aihepiiriin parissa tehtyä työtä, jotta aihepiiriin osaaminen laajenisi. Tämä työ on tehty VTT:n omarahoitteisena kehitystyönä.

Erikoistutkijat Ilona Lindhom, Mikko Ilvonen ja Heikki Raiko VTT:stä sekä tekn. tri Matti Vuorio ovat antaneet julkaisun sisältöön ja esitystapaan liittyviä hyödyllisiä kommentteja.

Sisältö

Tiivistelmä	3
Abstract	4
Esipuhe	5
Symboliluettelo	8
1. Säteilylämmönsiirron teoriaa	11
1.1 Yleistä lämpösäteilystä	11
1.2 Tarkasteluja kaksiulotteisessa tapauksessa	13
1.3 Näkyvyyskerroimen käsite	15
1.4 Näkyvyyskerroin kaksiulotteisessa tasotapauksessa	17
1.5 Näkyvyyskerroimia koskevia vaatimuksia	17
1.6 Crossed strings -menetelmä.....	23
1.7 Lämpösäteilyn emissio, absorptio ja heijastuminen	27
1.7.1 Lämpösäteily kiinteän aineen pinnassa	28
1.7.2 Lämpösäteilyn absorboituminen kaasuun	28
1.8 Radiositeetti	29
2. Säteilylämmön käsittelystä tietokoneohjelmassa	39
2.1 Kontrollitulavuusmenetelmä.....	39
2.2 Yleisiä periaatteita	39
2.3 Reunaehtojen käsittely.....	42
2.2.1 Kapea sisäinen säteilyrako	42
2.2.2 Yleinen säteilypintatapaus	44
2.4 Näkyvyyskerroimien laskennasta	47
2.5 Näkyvyyskerroimien laskennasta polttoainesauvojen välillä	47
2.5.1 Kahden ympyräsylinterin pinnalla olevan alkion välinen näkyvyyskerroin	50
2.5.2 Ympyräalkion ja tasoalkion välinen näkyvyyskerroin	54
2.5.3 Kahden tasoalkion välinen näkyvyyskerroin	55

3. Säteilylämmönsiirto ydinpolttoaine-elementin sisällä	57
3.1 Säteilylämmönsiirto loppusijoituskapselissa	57
3.2 Säteilylämmönsiirto polttoaine-elementissä eri lämpötiloissa	63
3.2.1 Efektiivisen lämmönjohtumiskertoimen määrittäminen	66
3.2.2 Täydentäviä testiajoja	69

Yhteenveto	73
-------------------------	-----------

Lähdeluettelo	74
----------------------------	-----------

Liitteet

Liite A: Tietokoneohjelman verifointia

Symboliluettelo

Latinalaiset kirjaimet

[A]	pinta-ala	[m ²]
[c]	lämpökapasiteetti	[J/kg/K]
[c _v]	volumetrinen lämpökapasiteetti	[J/m ³ /K]
[C]	tasapainoyhtälön vasen puoli	[J/m ³ /K/s]
[E]	emittoituvan lämpösäteilyn voimakkuus	[W/m ²]
[F]	näkyvyyskerroin	[-]
[I]	intensiteetti	[W/m ²]
[J]	radiositeetti	[W/m ²]
[P]	teho	[W]
[Q]	lämpöenergia	[J]
[q]	lämpötiheys	[J/m ³]
[R, r]	säde	[m]
[RHS]	tasapainoyhtälön oikea puoli (Right Hand Side)	[J/m ³ /s]
[s]	sivun pituus	[m]
[T]	lämpötila	[°C tai K]
[t]	aika	[s]
[V]	tilavuus	[m ³]
[x, y, z]	kartesiset koordinaatit	[m]

Kreikkaiset kirjaimet

[a]	lämmönsiirtokerroin, absorptiokerroin	[W/m ² /K]
[Δt]	aikainkrementti	[s]
[ε]	emissiviteetti	[-]
[ϕ]	lämpövuoto	[W/m ²]
[Φ]	sisäinen lämmönkehitys	[W/m ³]
[λ]	lämmönjohtavuus	[W/m/K]
[λ_{eff}]	efektiivinen lämmönjohtavuus	[W/m/K]
[θ]	kulma	[rad]
[ρ]	tiheys, heijastuskerroin	[kg/m ³]
[σ]	Stefanin–Boltzmannin vakio = $5,6697 \cdot 10^{-8}$	[W/(m ² K ⁴)]

Erikoismerkinnät

BWR	kiehutusvesireaktori
EPR	European pressurized water reactor
PWR	painevesireaktori
VVER	Loviisa-tyyppinen painevesireaktori
2D	kaksidimensioinen
3D	kolmedimensioinen

1. Säteilylämmönsiirron teoriaa

Tässä luvussa käsitellään säteilylämmönsiirron teoriaa, kuten näkyvyyskertoimien määrittämistä, näkyvyyskertoimia koskevia ehtoja sekä säteilyn emission, absorbtion ja heijastumisen samanaikaiseen käsittelyyn käytettyä radiositeettia.

1.1 Yleistä lämpösäteilyä

Jokainen absoluuttista nollapistettä korkeammassa lämpötilassa oleva pinta lähettää lämpötilansa mukaista sähkömagneettista lämpösäteilyä, joka on sitä lyhytaaltoisempaa mitä korkeampi lämpötila on. Huoneen lämpötilassa olevan kapaleen pinnan lähettämän pinnan lämpö- eli infrapunasäteilyn aallonpituus on noin 8–12 μm . Silmin nähtävän valon aallonpituus on noin 0,35–0,70 μm . Lämpösäteilevä pinta lähettää aallonpituudeltaan eripituista säteilyä ja kyseessä on säteilyspektri, jolla on huippukohta ja hallitseva aallonpituus. Tietynlämpöisen pinnan säteilyn spektrin huippua vastaava aallonpituus on Wienin siirtymälain $\lambda_{max} = 3000 \mu\text{m}/T[\text{K}]$ mukaan kääntäen verrannollinen pinnan absoluuttiseen lämpötilaan. Esimerkiksi lämpötiloissa 300 K, 600 K, 1000 K ja 1200 K pinnan lähettämän lämpösäteilyn aallonpituudet ovat noin 10 μm , 5 μm , 3 μm ja 2,5 μm . Lyhin lämpö- eli infrapunasäteilyn aallonpituus on noin 0,7 μm , joka vastaa lämpötilassa 5800 K olevan auringon pinnan lähettämän säteilyspektrin huippua.

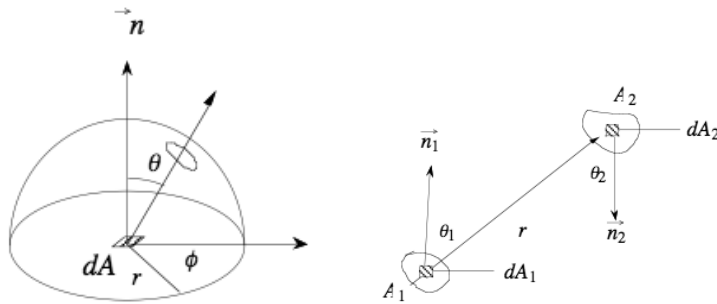
Pinnan lähettämän (emittoiman) lämpösäteilyn voimakkuus (lämpövuoto) $[\text{W}/\text{m}^2]$ on (pinnan välittömässä läheisyydessä)

$$E = \varepsilon \sigma T^4, \quad (1)$$

jossa ε on pinnan emissiviteetti, σ on Stefanin-Boltzmannin vakio [$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$] ja T on pinnan absoluuttinen lämpötila [K]. Emissiviteetti vaihtelee välillä 0...1 (mustan pinnan $\varepsilon = 1$).

Johdetaan kaava sille, miten lämpösäteilyä lähettävä pinta vaikuttaa sen ulkopuolella olevaan tarkastelupisteeseen P tulevan säteilyn voimakkuuteen. Lämpösäteily ja sen synnyttämä valo ovat samantyyppistä sähkömagneettista säteilyä, joten niitä koskevat samantyyppiset lainalaisuudet. Tarkastellaan havainnollisuuden vuoksi hehkuvapintaista tasoa, joka lämpösäteilyn ohella lähettää myös nä-

kyvää valoa. Asetetaan tarkastelupisteestä kartio kohtisuorasti säteilevään pintaan. Tarkastelupisteeseen (silmään) kohdistuu tietty säteilyintensiteetti. Kallistetaan sitten säteilypintaa kulman q verran (kohtisuorassa tapauksessa $q = 0$). Kartion sisälle jäävä pinta-ala kasvaa kertoimella $1/\cos\theta$ ja tämän mukaisesti myös kokonaissäteilyteho. Käytännön kokemuksen mukaan pinta näyttää kuitenkin edelleen yhtä kirkaalta. Tämä on mahdollista vain, kun pinta-alan kasvu kompensoituu siten, että pinnasta lähtevän säteilyn intensiteetti noudattaa kosiniriippuvuutta $I = I_0 \cos\theta$, missä I_0 on pinta-alkiosta dA lähtevä kaavan 1 mukainen intensiteetti. Kääntelemällä säteilevää tasoa eri suuntiin katselukulmaan tuleva intensiteetti on tason asennosta, siis kulmasta θ riippumaton vakio. Valaiseva levy näyttää yhtä kirkaalta eri suunnista katsottuna, ja tasaisesti säteilevä pallo, kuten aurinko, tai pallomainen opaaliiliasinen valolamppu näyttää keskeltä yhtä kirkaalta kuin reunoiltaan. Lämpösäteilyn intensiteetin kulmariippuvuus on siis kosinimainen (Lambertin vuonna 1760 esittämä kosinilaki).



Kuva 1. Alkion dA_1 lämpösäteily puoliavaruuteen (a) ja säteily alkion dA_1 alkioon dA_2 (b).

Etäisyysriippuvuuden määrittämiseksi integroidaan lämpösäteilyn intensiteetti $I = I_0 \cos\theta$ r -säteisen puolipallon pinnan yli (kuva 1a), jolloin saadaan

$$I_0 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, 2\pi r \sin\theta \, r \, d\theta = \pi r^2 I_0 = \varepsilon \sigma T^4 dA. \quad (2)$$

Ratkaisemalla I_0 saadaan differentiaalisen lämpösäteilevän pinta-alkion dA aiheuttamaksi lämpövuoksi pallopinnalla

$$d\phi = \varepsilon \sigma T^4 \frac{\cos\theta}{\pi r^2} dA. \quad (3)$$

Tämä säteilylämmönsiirron peruskaava ilmaisee säteilyintensiteetin riippuvuuden säteilylähteen etäisyydestä r tarkkailupisteeseen ja suuntakulmasta θ : Säteilyn intensiteetti vaimenee siis kääntäen verrannollisesti etäisyyden r neliöön ja kosinimaisesti kulman θ suhteen. Kaavan (3) johtamistapa huomioonottaen kaava ei päde, kun r tulee pieneksi. Se pätee vain, kun ala dA on riittävän pieni etäisyyteen r verrattuna.

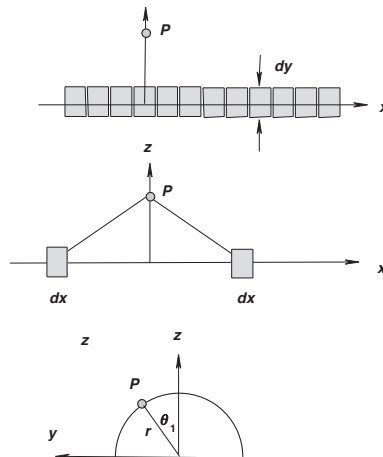
Jos säteilyä vastaanottavan pinnan pintaa vastaan kohtisuoraa normaalivektoria käännetään kulman θ_2 verran (kuva 1b), jolloin säteily kohdistuu siihen vinosti ja säteilyvuo pinnasta 1 pintaan 2 on (vuon laatu on $[W/m^2]$)

$$d\phi_{1 \rightarrow 2} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dA_1, \quad (4)$$

jossa selvyyden vuoksi säteilyä lähettävään pintaan 1 liittyen on merkitty $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $dA_1 = dA$ ja $\theta_1 = \theta$.

1.2 Tarkasteluja kaksiulotteisessa tapauksessa

Edellä esitettiin kolmiulotteisessa tapauksessa alkion puoliavaruuteen lähettämän säteilyn kaavat (3) ja (4). On tarpeen esittää vastaavat kaavat kaksiulotteisessa tapauksessa. Asetetaan yhtä voimakkaasti lämpösäteilyä lähettäviä dy -levyisiä suorakaidealkioita ääretön määrä vierekkäin x -akselille (kuva 2), jolloin tilanne jokaisessa kohdassa x -akselilla on sama ja tilanne x -akselia vastaan kohtisuorassa tasossa on kaksiulotteinen.



Kuva 2. Säteilykaavan johtaminen tasotapauksessa.

1. Säteilylämmönsiirron teoriaa

Määritetään yz -tasossa olevan pisteen P saama säteilyintensiteetti. Asetetaan sylinterin pinnalla sijaitsevan P -pisteen kautta kulkeva x -akselin suuntainen r -säteinen sylinteri, jonka pyörähdysakseli on x -akseli ja jonka lävistävä säteilytiheys määritetään. Etäisyys R sekä lähtö- ja tulokulman kosinit $\cos\alpha_1$ ja $\cos\alpha_2$ ovat (kaksi alinta kosinikaavaa saadaan vektoritarkastelulla)

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2 + r^2} \\ \cos\alpha_1 &= \frac{r \cos\theta_1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \\ \cos\alpha_2 &= \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} . \end{aligned} \quad (5)$$

Kaavasta (4) saadaan lämpövuoksi sylinteripintaa vastaan kohtisuorasti (kerroin 2 aiheutuu kahdesta peilisymmetrisestä puoliskosta)

$$d\phi = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 dy \int_0^\infty 2 \frac{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\pi r^2} dx = \frac{2}{\pi} \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \cos\theta_1 dy \int_0^\infty 2 \frac{r^2}{(x^2 + r^2)^2} dx . \quad (6)$$

Tästä saadaan edelleen

$$d\phi = \frac{1}{\pi} \varepsilon_1 \sigma T^4 dy \cos\theta_1 \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(\arctan \frac{x}{r} + \frac{rx}{x^2 + r^2} \right) = dy \varepsilon_1 \sigma T^4 \frac{\cos\theta_1}{2r} . \quad (7)$$

Merkitsemällä $da = dy$ saadaan (vuon ϕ laatu on $[W/m^2]$)

$$d\phi = \varepsilon \sigma T^4 \frac{\cos\theta}{2r} da . \quad (8)$$

Tämä on siis äärettömän pitkän da -levyisen kaistan aiheuttama säteilytiheys sylinteripinnalle. Kaava (8) eroaa vastaavasta kolmiulotteisen tapauksen kaavasta (4) siten, että pinta-alan dA $[m^2]$ paikalle tulee kaistan leveys da $[m]$ ja nimittäjässä termin πr^2 paikalle tulee termi $2r$. Säteilyn intensiteetti vaimenee siis kääntäen verrannollisesti etäisyyteen r ja kosinimaisesti kulman θ suhteen. Tulokulma on $\cos\theta_2 = 1$, sillä tarkasteltiin sylinterin pinta-alkiota. Jos tulokulma poikkeaa 0:sta, kaavasta (8) tulee

$$d\phi = \varepsilon \sigma T^4 \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{2r} da . \quad (9)$$

Tämä säteilylämmönsiirron peruskaava kaksiulotteisessa tapauksessa esittää siis äärettömän pitkän da -levyisen tasalämpöisen kaistan aiheuttamaa säteilytiheyttä sylinteripinnalle, jonka pyörähdysakselilla äärettömän pitkä kaista on. Säteilyn intensiteetti vaimenee kääntäen verrannollisesti etäisyyteen r .

1.3 Näkyvyyskerroimen käsite

Jos emissiviteetti ja lämpötila pinnalla 1 ovat vakioita, koko pinta-alalta A_1 lähtevä säteilyteho on $[W]$ (kaava 1)

$$W_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 A_1 = E_1 A_1 . \quad (10)$$

Osa tai kaikki tästä tehosta kohdistuu toiseen pintaan 2. Kaavasta (4) saadaan integroimalla toiseen pintaan 2 kohdistuvaksi tehoksi

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_1 \int_{A_2} \left(\int_{A_1} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dA_1 \right) dA_2 = F_{1 \rightarrow 2} W_1 , \quad (11)$$

jossa $F_{1 \rightarrow 2}$ on *näkyvyyskerroin* (dimensioton luku)

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \left(\int_{A_1} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dA_1 \right) dA_2 . \quad (12)$$

Merkintätapa $F_{1 \rightarrow 2}$ tarkoittaa näkyvyyskerrointa ja lämpösäteilyä pinnasta 1 pintaan 2. Vielä selvyuden vuoksi

$$W_{1 \rightarrow 2} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 A_1 F_{1 \rightarrow 2} = E_1 A_1 F_{1 \rightarrow 2} = W_1 F_{1 \rightarrow 2} . \quad (13)$$

Näkyvyyskerroin $F_{1 \rightarrow 2}$ (≤ 1) ilmaisee pinnalta A_1 emittoituvasta säteilytehosta $W_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 A_1$ pinnalle A_2 tulevaa osaa. Pinnan 2 ominaisuuksista riippuu, paljonko sille tulevasta tehosta absorboituu ja paljonko heijastuu pois. Musta kappale imee kaiken siihen kohdistuvan säteilyn kaikilla aallonpituuksilla. Harmaa kappale absorboi osan siihen kohdistuvasta säteilyvoimakkuudesta osan heijastuessa takaisin ja mahdollisesti osan lävistäessä materiaalin. Lämpösäteilyn ohella näkyvyyskerrointa voidaan soveltaa muunkinlaiseen sähkömagneettiseen säteilyyn, kuten valon käyttäytymiseen optiikassa ja valaistuksessa.

Jos emittoivan pinnan 1 asemesta emittoiva pinta on pinta 2, saadaan kaavasta (11) indeksit vaihtamalla

$$W_{2 \rightarrow 1} = e_2 \int_{A_1} \left(\int_{A_2} \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_1}{\pi r^2} dA_2 \right) dA_1 = F_{2 \rightarrow 1} W_2, \quad (14)$$

jossa $F_{2 \rightarrow 1}$ on näkyvyyskerroin

$$F_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{A_2} \int_{A_1} \left(\int_{A_2} \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_1}{\pi r^2} dA_2 \right) dA_1. \quad (15)$$

Integraalilaskennan periaatteiden mukaan kaksoisintegraaleissa (12) ja (15) integrointijärjestys voidaan vaihtaa ja kaksoisintegraalit ovat näin ollen yhtä suuret, joten kaavoista (12) ja (15) seuraa

$$A_1 F_{1 \rightarrow 2} = A_2 F_{2 \rightarrow 1}. \quad (16)$$

Kahden pinnan i ja j välille voidaan siis kirjoittaa resiprookkilause

$$A_i F_{i \rightarrow j} = A_j F_{j \rightarrow i}. \quad (17)$$

Tätä tärkeää resiprookkilauseetta voidaan hyödyntää näkyvyyskerroimien määrittämisessä, kuten jäljempänä esitettävistä esimerkeistä ilmenee.

Jos alkiot ovat pieniä suhteessa etäisyyteen r , integraalit jäävät pois ja kaavoista (12) ja (15) tulee

$$\begin{aligned} F_{1 \rightarrow 2} &= \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} \Delta A_2 \\ F_{2 \rightarrow 1} &= \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_1}{\pi r^2} \Delta A_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Numeerisessa laskennassa pienillä alkiolla tapahtuvaa laskentaa varten saadaan hyödyllinen kaava

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{\Delta A_2}{\Delta A_1} F_{2 \rightarrow 1}. \quad (18b)$$

Kaavoissa esiintyvien pinta-alojen on esimerkiksi $[m^2]$.

1.4 Näkyvyyskerroin kaksiulotteisessa tasotapauksessa

Kaavoja (12) ja (15) vastaavat kaavat ovat tasotapauksessa kaava (9) huomioonottaen

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{a_1} \int_{a_2} \left(\int_{a_1} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{2r} da_1 \right) da_2 \quad (19)$$

$$F_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{a_2} \int_{a_1} \left(\int_{a_2} \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_1}{2r} da_2 \right) da_1 \quad (20)$$

Jos alkioit ovat pieniä, integraalit jäävät pois ja kaavat ovat

$$\begin{aligned} F_{1 \rightarrow 2} &= \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{2r} \Delta a_2 \\ F_{2 \rightarrow 1} &= \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_1}{2r} \Delta a_1 . \end{aligned} \quad (21)$$

Numeerisessa laskennassa pienillä alkiolla tapahtuvaa laskentaa varten saadaan hyödyllinen kaava

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1} F_{2 \rightarrow 1} . \quad (22)$$

Kaavoissa esiintyvien pituuksien dimensio on esimerkiksi [m].

1.5 Näkyvyyskerroimia koskevia vaatimuksia

Pinnan i lähettämä (emittoima) säteilyteho välittömässä pinnan läheisyydessä on

$$W_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 A_i . \quad (23)$$

Tämä säteilyteho kohdistuu kaikkiin muihin näkyviin pintoihin ja koveran pinnan tapauksessa myös osittain itsensä suhteen. Energian säilymisperiaatteen mukaisesti kaikkiin muihin pintoihin tulevan tehon on oltava yhtä suuri kuin lähtevä teho W_j . Pinnan i lähettämä säteilyteho toisen pinnan k suuntaan on kaavaa (13) soveltamalla

$$W_{i \rightarrow k} = W_i F_{i \rightarrow k} . \quad (24)$$

Säteilyteho kaikkiin pintoihin saadaan summaamalla, ts.

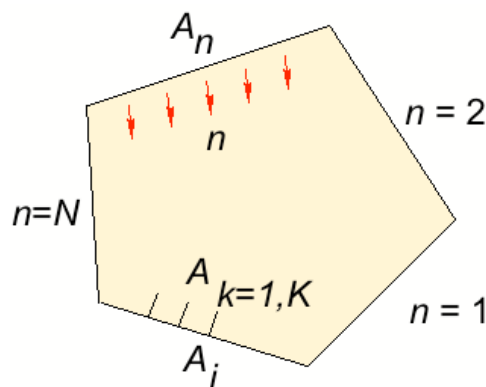
$$W_i \sum_{k=1}^K F_{i \rightarrow k} = W_i, \quad (25)$$

mistä seuraa tärkeä näkyvyyskertoimia koskeva ns. summausehto

$$\sum_{k=1}^K F_{i \rightarrow k} = 1. \quad (26)$$

Näkyvyyskertoimia koskevaa summausehtoa voidaan hyödyntää tehokkaasti näkyvyyskertoimien määrittämisessä, kuten jäljempänä esitettävistä esimerkeistä ilmenee.

Jos säteilytehoa lähettävä pinta on kovera, osa sen lähettämästä säteilytehosta osuu takaisin lähettävään pintaan ja tällaisen koveran pinnan i itsensä näkyvyyskertoimen $F_{i \rightarrow i} > 0$ on oltava mukana summassa (26). Tasomaisen tai kuperan pinnan tapauksessa $F_{i \rightarrow i} = 0$. Summaussääntö pätee siis koverallekin pinnalle, kunhan summaus ulotetaan koskemaan myös tarkastelupintaa itseään. Pinnasta i kaikkiin muihin näkyviin pintoihin ja koveran pinnan tapauksessa myös itsensä suhteen laskettujen näkyvyyskertoimien summan tulee siis olla ykkösen suuruinen, jotta energiatasapaino toteutuisi. Jos esimerkiksi numeerisessa laskennassa ehto ei toteudu, jo vakio-tilassa lämpöä virtaa pintoihin tai niistä pois päin. Pinnan puuttuvasta osasta lämpöä virtaa absoluuttiseen nollapisteeseen, joten virheet voivat tulla hyvinkin suuriksi. Koko se avaruus, johon yksittäinen pinta näkyy, on siis otettava huomioon. Jos pintojen väliin jää aukkoja, nekin on käsiteltävä esimerkiksi tunnetussa lämpötilassa olevina kaiken säteilyn absorboivina tai heijastavina alueina.



Kuva 3. Suljetun alueen muodostuminen $n = 1 \dots N$ suorasta sivusta ja sivun i jakaminen $k = 1 \dots K$ osa-alueeseen.

Johdetaan vielä höydyllisiä kaavoja kuvan 3 avulla havainnollistaen. Sivulta n sivulle i tuleva säteilyteho voidaan laskea summaamalla sivulta n sivun i yksittäisiin alkioihin tulevat säteilytehot. Tästä seuraa kaava

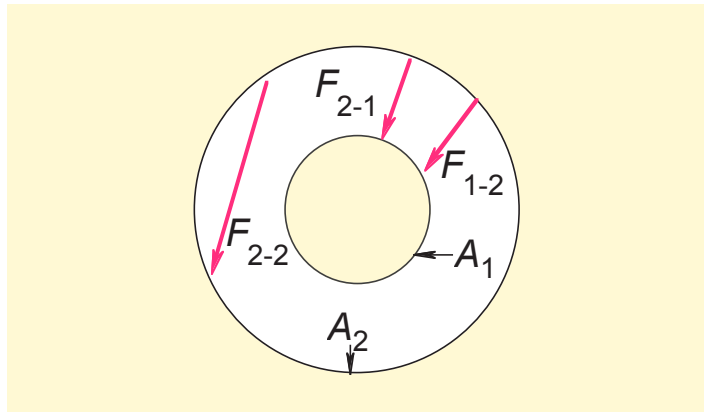
$$F_{n \rightarrow i} = \sum_{k=1}^K F_{n \rightarrow k} . \quad (27)$$

Kertomalla tämä A_n :llä sekä soveltamalla resiprookkilauseetta (17) saadaan joissakin tapauksissa näkyvyyskertoimien määrittäessä hyödyllinen kaava

$$A_n F_{n \rightarrow i} = \sum_{k=1}^K A_k F_{k \rightarrow n} . \quad (28)$$

Yksittäisen pinnan ei tarvitse olla tasomainen. Resiprookkilauseen (17), summausehdon (26) ja kaavojen (27–28) hyödyllisyys perustuu siihen, että jos jokin näkyvyyskerroin tunnetaan, muita näkyvyyskertoimia voidaan helposti määrittää em. kaavojen avulla. On korostettava, että numeerinen näkyvyyskerroin äärellisten pintojen välille voidaan muodostaa vain, jos lämpötila ja emissiviteetti yksittäisen pinnan koko alueella on riittävällä tarkkuudella vakio, jotta E_1 ja E_2 voitiin siirtää integraalien eteen kaavoissa (11) ja (14). Jos näin ei ole, alue on jaettava riittävän pieniin osa-alueisiin.

Esimerkki 1: Samankeskisten sylintereiden väliset näkyvyyskertoimet



Kuva 4. Näkyvyyskertoimet kahden samankeskisen pitkän sylinterin välillä.

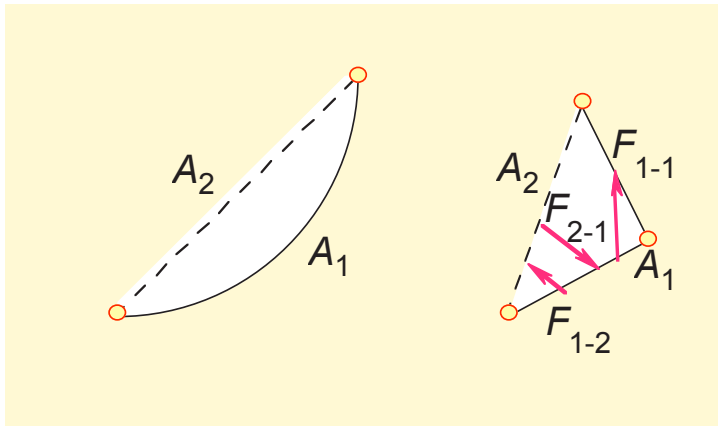
Johdetaan kahden samankeskisen pitkän sylinterin (kuva 4) väliset näkyvyyskerroimet. Kaikki sisemmästä sylinteripinnasta lähtevä lämpöteho kohdistuu ulom-

paan sylinteripintaan, joten $F_{1 \rightarrow 2} = 1$. Resiprookkilauseen (17) mukaan $F_{2 \rightarrow 1} = (A_1/A_2) F_{1 \rightarrow 2} = A_1/A_2 = r_1/r_2 \neq 1$. Ilman sisempää sylinteriä kovera ulompi sylinteripinta näkee kokonaan itsensä, mutta nyt se näkee itsensä vain osittain. Summausehdosta (26) saadaan $F_{2 \rightarrow 2} = 1 - F_{2 \rightarrow 1} = 1 - A_1/A_2$. Todetaan, että ehdot $F_{1 \rightarrow 1} + F_{1 \rightarrow 2} = 1$ ($F_{1 \rightarrow 1} = 0$) ja $F_{2 \rightarrow 1} + F_{2 \rightarrow 2} = 1$ toteutuvat.

Pintojen ei tarvitse olla ympyrän muotoisia sylintereitä. On riittävää, kun sisällä oleva pinta on kupera, jolloin ei esiinny näkyvyyskerrointa sen itsensä suhteen. Pinnat voivat olla myös kolmiulotteisia ja edellä olevat kaavat pätevät edelleenkin, kunhan sisempi pinta on kupera. Lämpötilojen tulee olla vakioita kummallakin pinnalla erikseen.

Esimerkki 2: Koveran pinnan näkyvyyskerroin itsensä suhteen

Kovera pinta voi muodostua kaarevasta pinnasta tai murtoviivasta, esimerkiksi kahdesta tasosta tai janasta (kuva 5). Yhdistetään koveran pinnan 1 päätepisteet suoralla (tasomaisella) pinnalla 2. Säteilevän pinnan pinta-ala on A_1 ja päätepisteet yhdistävän tason/janan pinta-ala on A_2 . Resiprookkilauseesta $A_1 F_{1 \rightarrow 2} = A_2 F_{2 \rightarrow 1}$ seuraa $F_{1 \rightarrow 2} = A_2/A_1$, koska $F_{2 \rightarrow 1} = 1$. Summausehdosta $F_{1 \rightarrow 1} + F_{1 \rightarrow 2} = 1$ saadaan $F_{1 \rightarrow 1} = 1 - F_{2 \rightarrow 1} = 1 - A_2/A_1$.

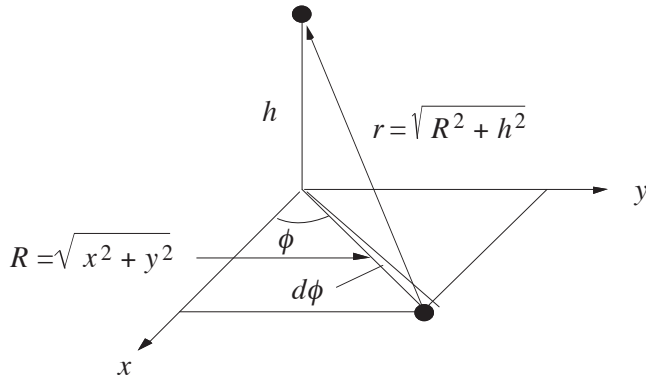


Kuva 5. Koveran pinnan näkyvyyskerroimen määrittäminen. Ehyt viiva on vakio-
lämpötilassa oleva säteilypinta.

Esimerkit 1 ja 2 ovat hyviä esimerkkejä resiprookkilauseen (17) ja summausehdon (26) hyödyllisyydestä näkyvyyskerroimien määrittämisessä.

Esimerkki 3: Säteilylämmönsiirto kahden laajan tasopinnan välillä

Lasketaan säteilylämmönsiirto kahden yhdensuuntaisen äärettömän suuren tasopinnan välillä suoralla integroinnilla (kuva 6). Tasojen välinen etäisyys olkoon h .



Kuva 6. Säteily tason alkioista toisella tasolla olevaan tarkastelupisteeseen.

Asetetaan koordinaatiston xy -taso alapuolella olevan pinnan tasoon. Tarkastellaan yläpuolella olevan tasopinnan kohdassa $x = y = 0, z = h$ olevaa pistettä. Siirrytään napakoordinaatteihin. Tarkastelupisteeseen tulee kaavaa (4) soveltaen xy -tason x, y olevasta alkioista lämpövuoto

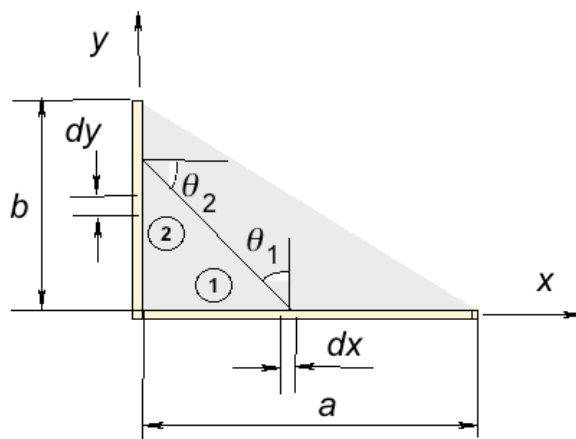
$$\begin{aligned} d\phi_{1 \rightarrow 2} &= \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \frac{\frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} R d\phi dR}{\pi(R^2 + h^2)} \\ &= \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \frac{h^2 R dR d\phi}{\pi(R^2 + h^2)^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Integroimalla saadaan alkioon dA_2 tulevaksi kokonaisvuoksi (sovelletaan muuttujan vaihtoa $R^2 + h^2 = t, dt = 2RdR$)

$$\begin{aligned} \phi_{1 \rightarrow 2} &= \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \int_0^\infty \frac{h^2 R dR}{\pi(R^2 + h^2)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \int_{h^2}^\infty \frac{h^2 dt}{t^2} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \left[-\frac{h^2}{t} \right]_{h^2}^\infty = \varepsilon_1 \sigma T_1^4. \end{aligned} \quad (30)$$

Tämä oli odotettavissa oleva tulos, ja näkyvyyskerroin on ykkösen suuruinen kahden yhdensuuntaisen äärettömän tason välillä. Nettosäteilytehoiteus pintojen välillä määritetään jäljempänä esimerkissä 8, jossa pintojen emissiviteetit voivat olla erisuuruisia.

Esimerkki 4: Kahden suorassa kulmassa olevan sivun välinen näkyvyyskerroin



Kuva 7. Näkyvyyskerroin kahden toisiinsa nähden suorassa kulmassa olevan sivun alasivulta 1 pystysivulle 2.

Lasketaan kahden toisiinsa nähden suorassa kulmassa olevan sivun (kuva 7) välinen näkyvyyskerroin suoralla integroinnilla. Geometrisella tarkastelulla saadaan kaavat

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos \theta_2 &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} . \end{aligned} \tag{31}$$

Integroimalla saadaan kaavasta (18) näkyvyyskerroimeksi

$$\begin{aligned}
 F_{1 \rightarrow 2} &= \frac{1}{2a} \int_0^b \left(\int_0^a \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx \right) dy = \frac{1}{2a} \int_0^b \left(\int_0^a \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} dy \right) dx \\
 &= \frac{1}{2a} \int_0^b [-(a^2 + y^2)^{1/2} + y] dy = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{b}{a} - \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \right]. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Jos sivut ovat yhtä pitkät ($a = b$), $F_{1 \rightarrow 2} = F_{2 \rightarrow 1} = 1 - \sqrt{2}/2 = 0,292$. Lasketaan tämä vielä likimäärin kaksiulotteisen tasotapauksen kaavasta (21) asettamalla $\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$, $r = \sqrt{2}/2a$ (sivujen keskipisteiden välinen etäisyys) ja $\Delta a_2 = a$. Liki-kaavalla saadaan $F_{1 \rightarrow 2} = 0,353$, joka on 35 % tarkkaa arvoa suurempi.

Näkyvyyskertoimien määrittäminen on säteilylämmönsiirron laskennassa keskeinen tehtävä. Kaksinkertaisten integraalien takia näkyvyyskertoimen laskeminen suoralla integroinnilla on hankalaa eikä sitä sovelleta käytännössä. Tehokkaita tapoja ovat resiprookkilause (17) ja summausehto (26) yhdistettynä tunnettuihin ratkaisuihin. 2D-tasotapauksissa usein tehokas tapa on seuraavassa esitettävä crossed strings -menetelmä. Kirjallisuudesta löytyy runsaasti valmiita ratkaisuja kaksi- ja kolmiulotteisille sekä pyörähdystapauksille. Hyvä lähde on esimerkiksi <http://www.engr.uky.edu/rtl/Catalog/tablecon.html>.

1.6 Crossed strings -menetelmä

Tarkastellaan ensin kuvan 8a kolmikulmiota, jossa kullakin sisäänpäin kaarevalla sivulla (sivut voivat olla myös suoria) lämpötila ja emissiviteetti ovat vakioita. Johdetaan sivujen 1 ja 2 välinen näkyvyyskerroin $F_{1 \rightarrow 2}$. Resiprookkilauseeseen (17) ja summaussääntöön (26) avulla kirjoitetaan kuusi yhtälöä (kuusi näkyvyyskerrointa)

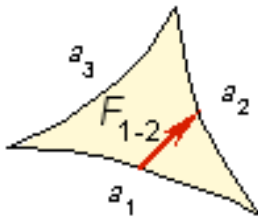
$$\begin{aligned}
 a_1 F_{1 \rightarrow 2} &= a_2 F_{2 \rightarrow 1} \\
 a_1 F_{1 \rightarrow 3} &= a_3 F_{3 \rightarrow 1} \\
 a_2 F_{2 \rightarrow 3} &= a_3 F_{3 \rightarrow 2} \\
 F_{1 \rightarrow 2} + F_{1 \rightarrow 3} &= 1 \\
 F_{2 \rightarrow 1} + F_{2 \rightarrow 3} &= 1 \\
 F_{3 \rightarrow 1} + F_{3 \rightarrow 2} &= 1. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Ratkaisuksi saadaan

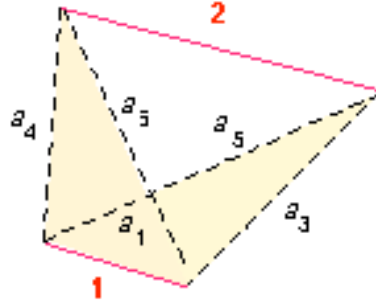
$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2a_1}. \quad (34)$$

Kuvan 8a kolmikulmiossa sivut voivat siis olla suoria tai kuperia, jolloin pituudet ovat kaaren pituuksia. Sivut eivät voi olla koveria, sillä kovera pinta säteilee itsensä suhteen ja $F_{i \rightarrow i} > 0$ ja kaavat (33) eivät enää päde (silloin termit $F_{i \rightarrow j}$ on

lisättävä summaussäännön kaavoihin ja ne voidaan laskea esimerkiksi 2 esitetyllä tavalla).



(a)



(b)

Kuva 8. Näkyvyyskerroin kolmikulmiossa (a) ja kahden pinnan 1 ja 2 välillä (b), jossa pinta 1 voi olla kupera pinnan 2 suuntaan ja pinta 2 voi olla kovera pinnan 1 suuntaan.

Edellä esitetyssä esimerkissä 4 näkyvyyskerroin voidaan laskea helposti kaavasta (35). Edelleen tapaus, jossa sivut eivät ole suorassa kulmassa toisiinsa nähden, on helppo laskea. Jos suorasisuisen kolmion sivut 1 ja 2 ovat yhtä pitkät, siis $a_1 = a_2$, on $F_{1 \rightarrow 2} = 1 - \sin \alpha/2$, missä α on sivujen välinen kulma.

Kuten edellä todettiin, kolmion sivut voivat olla myös kuperia. Sivujen kupe-ruutta voidaan lisätä niin, että sivut osuvat toisiinsa. Kaava (34) toimii edelleenkin. Kosketuspintaan voidaan ajatella infinitesimaalisen kapea säteilyrako, jonka eri puolilla lämpötilat ovat erisuuruiset.

Kaava (34) rajoittuu tapaukseen, jossa tarkastelupintojen 1 ja 2 toiset päät ovat samassa pisteessä. Jotta tästä rajoituksesta päästäisiin eroon, tarkastellaan kuvassa 8b olevassa tapauksessa pintojen 1 ja 2 välistä näkyvyyskerrointa $F_{1 \rightarrow 2}$. Piirretään kuvaan katkoviivoilla tarkastelupintojen 1 ja 2 päätepisteet yhdistävät apuviivat a_3 ja a_4 sekä diagonaalit a_5 ja a_6 . Nämä apuviivat ("langat", strings) voivat olla myös kaarevia. Soveltamalla summaussääntöä ja edellä johdettua kaavaa (34) kolmikulmioon, jonka sivut ovat a_1 , a_3 ja a_5 sekä toisaalta kolmikulmioon, jonka sivut ovat a_1 , a_4 ja a_6 , saadaan kolme yhtälöä

$$\begin{aligned}
 F_{1 \rightarrow 2} + F_{1 \rightarrow 3} + F_{1 \rightarrow 4} &= 1 \\
 F_{1 \rightarrow 3} &= \frac{a_1 + a_3 - a_5}{2a_1} \\
 F_{1 \rightarrow 4} &= \frac{a_1 + a_4 - a_6}{2a_1}, \tag{35}
 \end{aligned}$$

joista ratkaisemalla saadaan crossed strings -menetelmän kaava

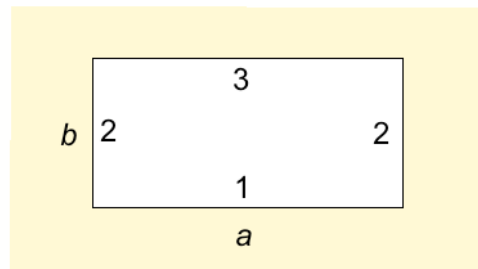
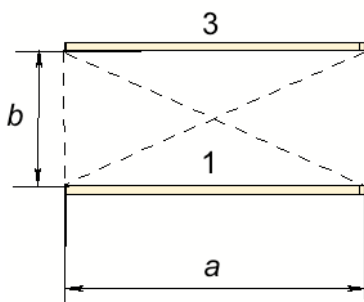
$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{a_5 + a_6 - (a_3 + a_4)}{2a_1}. \quad (36)$$

Näkyvyyskerroin sivulta 1 sivulle 2 on siis diagonaalien summan ja sivujen summan erotus jaettuna sivun 1 kaksinkertaisella pituudella. Tällä yksinkertaisella periaatteella voidaan laskea periaatteessa kaikkien tasotapausten näkyvyyskerroimet. Siksi tämä Hottellin vuonna 1954 esittämä crossed strings -menetelmä on hyvin tehokas. Sivun 2 voi olla muodoltaan kaareva ja kovera, sillä sivu a_2 ei esiinny kaavoissa. Sivun 1 voi olla kupera, mutta ei kovera, sillä kaava (34) ei salli tätä. Vastaavalla tavalla voidaan määrittää näkyvyyskerroin sivulta 2 sivulle 1. Silloin sivun 2 on oltava kupera ja sivun 1 muodolle ei aseteta ehtoja.

Aiemmin edellä suoralla integroinnilla lasketut esimerkkitapaukset ratkeavat crossed strings -menetelmällä helposti ja voidaankin siirtyä aiempia vaativampiin esimerkkitapauksiin.

Esimerkki 5. Kahden vastakkaisen sivun välinen näkyvyyskerroin

Lasketaan kahden vastakkain olevan yhtä pitkän sivun (kuva 9) välinen näkyvyyskerroin crossed strings -menetelmällä. Kuvatasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa sivut ovat äärettömän pitkiä.



Kuva 9. Näkyvyyskerroimen määrittäminen kahden yhdensuuntaisen sivun välillä.

Geometrisella tarkastelulla lasketaan diagonaalien ja sivujen pituudet ja kaavaa (36) soveltamalla näkyvyyskerroimeksi saadaan

$$F_{1 \rightarrow 3} = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2} - 2b}{2a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} - \frac{b}{a}. \quad (37)$$

Tämä tulos olisi saatu myös edellisen esimerkin 4 tuloksesta soveltamalla summausehtoa (26). On helppo todeta, että kuvaan 9 oikealle piirretyssä suljetussa suorakaiteessa alasisulta 1 muihin sivuihin laskettujen näkyvyyskerroimien summa on ykkösen suuruinen. Jos levyjen välinen etäisyys b lähestyy nollaa, näkyvyyskerroin lähestyy ykköstä.

Esimerkki 6. Kahden sylinterin välinen näkyvyyskerroin

Tarkastellaan kahta äärettömän pitkää sylinteriä (kuva 10), joilla on sama halkaisija. Kummankin sylinterin lämpötila on vakio sylinterin koko kehän ympäri. Crossed strings -menetelmän apuviivat on ulotettava kulkemaan koko kehän ympäri. Vapailla osuuksilla viivat ("langat") ovat suoria. Laskemalla tarvittavat kuvaan 10 punaisella merkityt pituudet saadaan kaavasta (36)

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{4\sqrt{\left(r + \frac{s}{2}\right)^2 - r^2} + 4\alpha r - 2(2r + s)}{4\pi r} = \frac{1}{\pi} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{s}{2r}\right)^2 - 1} + \alpha - \left(1 + \frac{s}{2r}\right) \right), \quad (38)$$

missä s on lyhin sylintereiden välinen etäisyys ja r on sylinterin säde. Punaiset viivat ulottuvat kuvassa 10 sylintereiden takapuolelle, mutta laskettaessa erotusta kaavasta (36) ympyräkaarien pituudet kumoavat takapuolella toisensa. Kaavan (38) saamiseksi kirjallisuudessa usein esitettyyn muotoon merkitään

$$X = 1 + \frac{s}{2r}$$

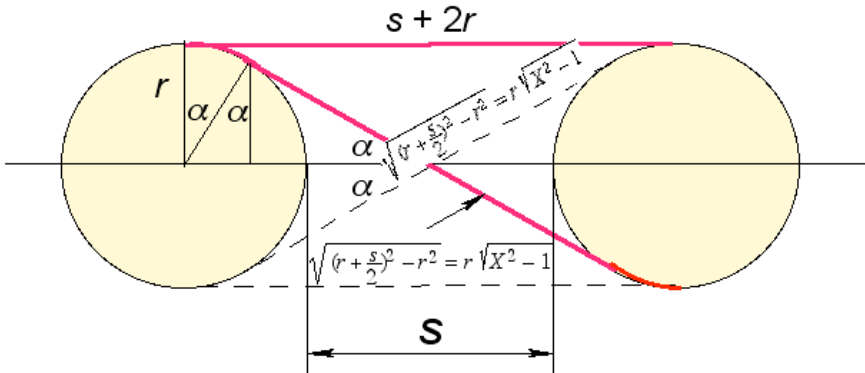
$$\sin \alpha = \frac{r}{r + \frac{s}{2}} = \frac{1}{X}, \quad (39)$$

jolloin näkyvyyskerroimeksi saadaan

$$F_{1 \rightarrow 2} = F_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{\pi} \left(\sin^{-1} \frac{1}{X} + \sqrt{X^2 - 1} - X \right). \quad (40)$$

Sinifunktion korottaminen potenssiin -1 tarkoittaa arcus sinus -operaatiota. On korostettava, että näkyvyyskerroin koskee sylinterin koko kehän ympäri ulottuvaa pinta-alaa. Jos sylinterit koskettavat toisiaan, $s = 0$ ja näkyvyyskerroin on 0,182, jolloin vakiolämpötilassa olevan koko kehän pituudelta emittoivan sylinterin lämpösäteilystä vain 18,2 % osuu toiseen sylinteriin lopun mennessä muualle. Osa toiseen sylinteriin saapuvasta säteilystä absorboituu siihen ja osa heijastuu takaisin jne. Kokonaissäteilylämmönsiirto sylintereiden välillä lasketaan jäljempänä

esitettävässä esimerkissä 10. On korostettava myös, että lämpötilan tulee olla vakio erikseen kummankin sylinterin pinnalla. Näin ei yleisesti ole, ja siksi sylinteripinta joudutaan jakamaan niin tiheästi osiin, että yksittäisellä osa-alueella lämpötila on riittävällä tarkkuudella vakio.



Kuva 10. Näkyvyyskerroimen määrittäminen kahden pitkän sylinteripinnan välillä.

Crossed strings -menetelmästä on yksinkertaisuutensa lisäksi se etu, että jos kaksi pintaa eivät näe toisiaan, näkyvyyskerroin tulee negatiiviseksi. Tämä ominaisuus yksinkertaistaa toimintoja tietokoneohjelmassa.

1.7 Lämpösäteilyn emissio, absorptio ja heijastuminen

Tarkastellaan seuraavassa lämpösäteilyä kiinteän aineen pinnassa ja absorboitumista kaasuun.

1.7.1 Lämpösäteily kiinteän aineen pinnassa

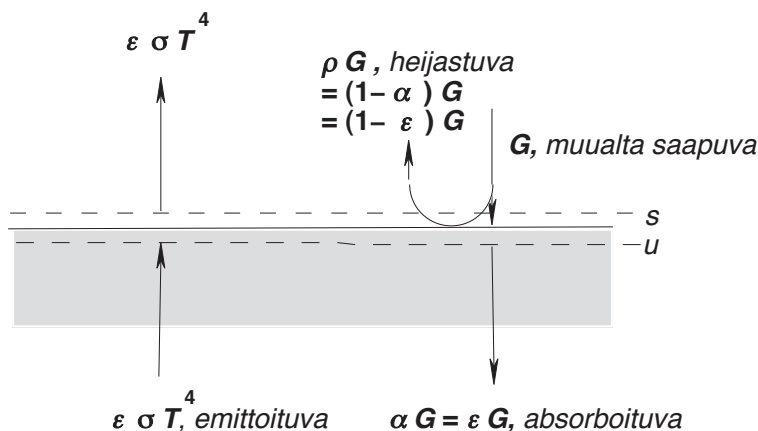
Tarkastellaan pinnasta emittoituvaa ja siihen muualta pintaan saapuvaa lämpösäteilyä (kuva 11). Aiemmin esitettiin pinnan lähettämän (emittoivan) lämpösäteilyn voimakkuus (lämpövuoto, kaava 1) [W/m^2] (pinnan välittömässä läheisyydessä)

$$E = \varepsilon \sigma T^4, \quad (41)$$

jossa ε on pinnan emissiviteetti (mustalle pinnalle $\varepsilon = 1$), σ on Stefan-Boltzmannin vakio [$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$] ja T on pinnan absoluuttinen lämpötila [K]. Mustasta pinnasta emittoituvaa säteilytehoa on σT^4 . Harmaasta pinnasta emittoituvaa tehoa on $\varepsilon \sigma T^4$.

Emissiviteettiä voidaan pitää laajoilla lämpötila-alueilla vakiona. Emissiviteetti muuttuu kuitenkin merkittävästi, jos pinta hapettuu (oksidoituu), siinä tapahtuu muita kemiallisia reaktioita tai lähestytään aineen sulamispistettä. Hyvin kiillotetun metallipinnan emissiviteetti ja absorptio on pieni, esimerkiksi kiillotetun kuparin noin 0,02. Huoneenlämmössä oksidoituneen kuparipinnan emissiviteetti on noin 0,6 (veden 0,993–0,998). Esimerkiksi lähteessä (Paloposki & Liedquist 2005) on esitetty hiiliteräksen ja ruostumattoman teräksen emissiviteetin mittaustuloksia lämpötila-alueella 200°C -600°C.

Emissiviteetin realistisen arvon selvittäminen on usein ongelmallista. Pinta-lämpötilan noustessa esimerkiksi oksidoituminen muuttaa merkittävästi emissiviteettiä. Käytännöllinen lähestymistapa on tehdä laskelmat varioimalla emissiviteettiä.



Kuva 11. Lämpösäteily harmaan pinnan läheisyydessä. Tarkastelu on lähteestä (Mills 1999).

Muualta saapuvan säteilyn voimakkuudesta tarkastelupinnan läheisyydessä käytetään merkintää G [W/m^2]. Pinnan emissiviteetti ϵ määritellään pinnan säteilyvoimakkuuden (E) suhteena samassa lämpötilassa olevan mustan kappaleen säteilyvoimakkuuteen (E_{musta}), ts. $\epsilon = E / E_{\text{musta}}$. Musta pinta absorboi kaiken siihen ulkopuolelta tulevan säteilytehon G . Harmaa pinta absorboi säteilytehosta osan αG , missä α on absorptiokerroin. Osa ρG (ρ , reflect) heijastuu takaisin. Aineen lävistävää säteilyä ei ole, sillä lämpösäteily absorboituu pintakerrokseen, jonka paksuus on suuruusluokaltaan saapuvan säteilyn aallonpituus. On siis $\alpha + \rho = 1$. Kirchoffin lain mukaan (termodynamiikan toinen pääsääntö) pinta emittoi ja absorboi yhtä voimakkaasti kullakin aallonpituudella, joten $\epsilon = \alpha$ ja $\rho = 1 - \epsilon$. Kokonaissäteilyn osalta ei kuitenkaan näin ole. Eroavuutta on hankala selvittää, joten käytännössä yleensä asetetaan kokonaissäteilyllekin $\epsilon = \alpha$.

1.7.2 Lämpösäteilyn absorboituminen kaasuun

Yksi- ja kaksiatomiset kaasut läpäisevät hyvin lämpösäteilyä ja valoa. Kuivaa ilmaa ja jalokaasuja voidaan pitää tällaisina kaasuina. Kolmiatomiset kaasut, kuten vesihöyry tai hiilidioksidi, absorboivat lämpösäteilyä. Kaasumolekyylejä voidaan havainnollistaa jousi-massa-systeemeillä. Kolmiatomisilla kaasuilla on enemmän värähtelymoodeja, joista kukin herättää sille ominaisen lämpösäteilyn spektriviuhan. Lämpösäteilyn kyky läpäistä kolmiatomista kaasua riippuu aallonpituudesta. Paras lämmönläpäisykyky esiintyy aallonpituusalueilla 3–5 μm (600–1000 K) sekä 8–12 μm (250–375 K). Spektrin huippu osuu näille transmissioikkunoiden alueille, kun $T \approx 600\text{--}1000\text{ K}$ sekä huoneenlämmössä $T \approx 300\text{ K}$. Sen sijaan aallonpituuksilla 5–8 μm tapahtuu absorptiota (vesihöyryyn) lämpötilavälillä $T = 375\text{--}600\text{ K}$. Jotta absorptiolla olisi merkittävä vaikutus, pitäisi lämpösäteilyn olla juuri absorptiopiikin kohdalla tai sitten kaasun läpi kuljetun matkan kerrottuna kaasun tiheydellä tulisi olla pitkä absorptiopituuteen nähden.

Käytetyn polttoaineen loppusijoituskapseleiden sisällä tapahtuvassa säteilylämmönsiirrossa ei esiinny absorptiota väliaineeseen, sillä väliaineena voi olla kuiva ilma, helium tai argon-kaasu. Sen sijaan käytetyn ydinpolttoaineen vesiallasvaraston kuumenemisessä esiintyy merkittävästi erilämpöisiä pintoja (betonia ja ruostumatonta terästä) ja väliaineena on vesihöyry tai ilman ja vesihöyryn seos. Ongelmallinen aallonpituusalue on 5–8 μm , siis lämpötila-alue 375–600 K. Muissa lämpötiloissa olevasta pinnasta säteily läpäisee vesihöyryyn. Säteilyn absorption merkitys vesihöyryssä lämpötila-alueella 375–600 K (102–323°C) vaatii omat laajat laskentansa ja mallintamisensa.

1.8 Radiositeetti

Lämpösäteilyn laskennassa monimutkaisissa geometrioissa on hyödyllistä ottaa käyttöön radiositeetti

$$J = \varepsilon \sigma T^4 + \rho G = \varepsilon \sigma T^4 + (1 - \varepsilon) G. \quad (42)$$

Radiositeetti on emittoituvan ja heijastuvan säteilyn summa (kuva 11). Heijastuvasta säteilystä ρG oletetaan, että se lähtiessään pinnasta käyttäytyy täysin samalla tavalla kuin emittoituva säteily ja noudattaa kosinilakia (3). Näin ollen radiositeettiin voidaan soveltaa samalla tavalla näkyvyyskerrointa ja resiprookkilauseetta kuin emittoituvaan säteilyyn. Radiositeetti esittää siis kaikkea tarkastelupinnasta poispäin suuntautuvaa säteilyä ja sen laatu on esimerkiksi $[\text{W}/\text{m}^2]$. Tämä on juuri se säteily, joka näkyvyyskerroimen mukaisesti laskettuna kohdistuu muihin näkyviin pintoihin. G on puolestaan kaikista muista näkyvistä pinnoista tarkastelupintaan kohdistuva säteily $[\text{W}/\text{m}^2]$. Se muodostuu siis muiden pintojen J -arvojen summavaikutuksesta tarkastelupintaan. Kaikista muista näkyvistä pinnoista tarkastelupintaan (ala A_j) kohdistuva säteilyteho $[\text{W}]$ on

$$\begin{aligned} A_i G_i &= A_1 F_{1 \rightarrow i} J_1 + A_2 F_{2 \rightarrow i} J_2 + \dots \\ &= A_i F_{i \rightarrow 1} J_1 + A_i F_{i \rightarrow 2} J_2 + \dots = A_i \sum_{k=1}^K F_{i \rightarrow k} J_k, \end{aligned} \quad (43)$$

jossa K on tarkastelupintaan näkyvien muiden pintojen lukumäärä ja jossa on sovellettu resiprookkilauseetta (17) $A_k F_{k \rightarrow j} = A_j F_{j \rightarrow k}$. On tärkeätä huomata näkyvyyskertoimessa indeksien järjestyksen vaihtuminen (ensimmäisen indeksin ilmaisemasta pinnasta jälkimmäisen indeksin ilmaisemaan pintaan). Muista näkyvistä pinnoista tarkastelupintaan kohdistuvan lämpösäteilyn kaavaksi saadaan

$$G_i = \sum_{k=1}^K F_{i \rightarrow k} J_k. \quad (44)$$

Kaavat (43) ja (44) pätevät kaikille harmaan pinnan diffuuseille säteilytermeille, siis emittoituvalle ja heijastuvalle lämpösäteilylle sekä radiositeetille. Pinnan i radiositeetille saadaan tärkeä peruskaava

$$J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) \sum_{k=1}^K F_{i \rightarrow k} J_k. \quad (45)$$

Jos pinta on kovera, summalausekkeessa esiintyy tarkastelupisteeseen i liittyvä nollasta eriävä termi $F_{i \rightarrow i} J_i$. Jos kaikkien pintojen lämpötilat ovat tunnettuja, voidaan muodostaa radiositeettien suhteen lineaarinen yhtälöryhmä, josta radiositeetit voidaan ratkaista.

Tarkastelupinnasta lähtevä radiositeetti ei ole sama kuin nettolämpövuoto, joka on (kuvassa 11 pinnan u tai s lävistävä, olettamalla, että $\varepsilon = \alpha$)

$$\phi_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 - \alpha_i G_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 - \varepsilon_i \sum_{k=1}^K F_{i \rightarrow k} J_k. \quad (46)$$

Tätä kaavaa sovelletaan pinnan lämpövuohdon asettamisessa. Numeerisessa mallissa, jossa on mukana myös kiinteiden aineiden johtuminen, tarvitaan sekä radiositeettia pintojen välisen vuorovaikutuksen kuvaamiseen että nettosäteilyä kiinteän pinnan vuohdon asettamisessa. Selvyiden vuoksi todettakoon, että tarkastelut pätevät vain, kun radiositeetilla on sama arvo kaikissa säteilypinnan pisteissä. Lämpötilan ja emissiviteetin sekä absorptiokertoimen tulee olla riittäväällä tarkkuudella vakioita yksittäisen säteilypinnan alueella.

Kaava (46) voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\phi_i = \varepsilon_i \sigma (T_i^4 - T_{vasta}^4), \quad (47)$$

missä T_{vasta} on vastinpinnan tehollinen lämpötila

$$T_{vasta} = \left(\frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^K F_{i \rightarrow k} J_k \right)^{1/4}. \quad (48)$$

Pinnan lähelle asetetut kuvitteelliset pinnat s ja u (kuva 11) lävistävä kokonaissäteilytehotiheys ϕ (ylöspäin) on

$$\begin{aligned} \phi &= \varepsilon \sigma T^4 + \rho G - G = J - G && \text{pinnan } s \text{ läpi} \\ \phi &= \varepsilon \sigma T^4 - \alpha G && \text{pinnan } u \text{ läpi.} \end{aligned} \quad (49)$$

Olettamalla, että $\varepsilon = \alpha$ ja eliminoimalla kaavoista (49) G saadaan nettosäteilylle myös esitysmuoto

$$\phi = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} (\sigma T^4 - J). \quad (50)$$

Tehotiheys ϕ [W/m^2] esittää siis pinnat s ja u molempiin suuntiin lävistävää kokonaissäteilytehoa positiivisena pinnasta kaasuun tai tyhjiöön päin.

Esimerkki 8: Säteilylämmönsiirto kahden laajan vastakkain olevan pinnan välillä

Jos kaksi laajaa tasopintaa 1 ja 2 ovat vastakkain ja niiden välissä on kapea vakiolevyinen rako, pintojen välinen näkyvyyskerroin on ykkösen suuruinen (vrt. esimerkki 3) ja nettosäteilytehotiheys pintojen välillä on

$$\phi_{netto} = -\varepsilon_1 \sigma T_1^4 + \varepsilon_1 J_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 - \varepsilon_2 J_1, \quad (51)$$

missä ε_1 ja ε_2 ovat pintojen emissiviteetit. Pintojen 1 ja 2 radiositeeteille ovat voimassa kaavat

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) J_2 \\ J_2 &= \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2) J_1. \end{aligned} \quad (52)$$

Kaavoista (51) ja (52) seuraa

$$\phi_{netto} = \frac{\sigma T_2^4 - \sigma T_1^4}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \varepsilon_{tot} (\sigma T_2^4 - \sigma T_1^4), \quad (53)$$

missä kokonaisemissiviteetti lasketaan kaavasta

$$\varepsilon_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (54)$$

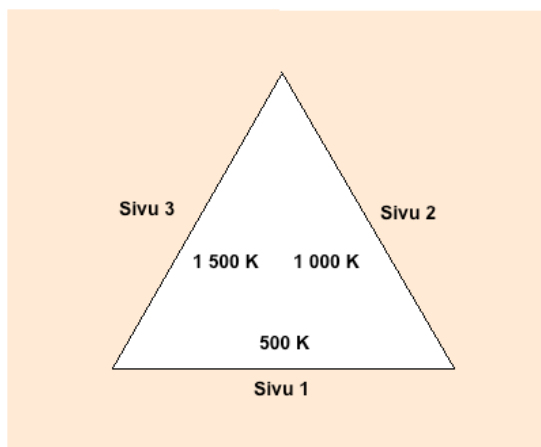
Tämä tulos voidaan johtaa myös tarkastelemalla edestakaisin heijastuaa säteilyä, kuten lähteessä (Mills 1999) on esitetty.

Jos pintojen emissiviteetit ovat yhtä suuria $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, on

$$\varepsilon_{tot} = \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon}. \quad (55)$$

Emissiviteetiltään samanlaisten vastakkain olevien pintojen kokonaisemissiviteetti ei siis ole sama kuin pinnan emissiviteetti. Yhtäsuuruus on vain, jos $\varepsilon = 0$ (ei säteilylämmönsiirtoa) tai $\varepsilon = 1$ (mustat pinnat) ja muissa tapauksissa kokonaisemissiviteetti pienempi kuin pinnan emissiviteetti. Jos esimerkiksi $\varepsilon = 0,5$, on $\varepsilon_{tot} = 0,333$.

Esimerkki 9: Säteilylämmönsiirto kolmen harmaan sivun välillä



Kuva 12. Säteilylämmönsiirto kolmen harmaan sivun välillä.

Tarkastellaan pitkää tunnelia, jonka poikkileikkaus on tasasivuisen kolmion muotoinen (kuva 12) ja jonka sivupinnat ovat lämpötiloissa 500 K, 1 000 K ja 1 500 K. Lasketaan kunkin pinnan lävistävä lämpövuoto. Pintojen emissiviteetti on $\varepsilon = 0,7$.

Soveltamalla radiositeetin kaavaa (45) kuhunkin sivuun saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) (F_{1 \rightarrow 2} J_2 + F_{1 \rightarrow 3} J_3) \\ J_2 &= \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2) (F_{2 \rightarrow 1} J_1 + F_{2 \rightarrow 3} J_3) \\ J_3 &= \varepsilon_3 \sigma T_3^4 + (1 - \varepsilon_3) (F_{3 \rightarrow 1} J_1 + F_{3 \rightarrow 2} J_2). \end{aligned} \quad (56)$$

Tasasivuisen kolmion tapauksessa kaikki näkyvyyskertoimet ovat 0,5 ja yhtälöryhmäksi tulee ($\varepsilon_i = 0,7$)

$$\begin{aligned} J_1 &= 0,7 \sigma T_1^4 + 0,15 (J_2 + J_3) \\ J_2 &= 0,7 \sigma T_2^4 + 0,15 (J_1 + J_3) \\ J_3 &= 0,7 \sigma T_3^4 + 0,15 (J_1 + J_2). \end{aligned} \quad (57)$$

Yhtälöryhmä voidaan ratkaista tavanomaisella eliminointitekniikalla, jolloin ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\sigma}{23} (17 T_1^4 + 3 T_2^4 + 3 T_3^4) = 47,5 \text{ kW/m}^2 \\ J_2 &= \frac{\sigma}{23} (3 T_1^4 + 17 T_2^4 + 3 T_3^4) = 79,8 \text{ kW/m}^2 \\ J_3 &= \frac{\sigma}{23} (3 T_1^4 + 3 T_2^4 + 17 T_3^4) = 220,0 \text{ kW/m}^2. \end{aligned} \quad (58)$$

Voidaan soveltaa myös iterointia, joka on suurten mallien tapauksessa kätevää. Kirjoitetaan yhtälöryhmä matriisimuotoon

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} 0,7 \sigma T_1^4 \\ 0,7 \sigma T_2^4 \\ 0,7 \sigma T_3^4 \end{pmatrix} + 0,15 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}_i, \quad (59)$$

missä i on iterointi-indeksi. Kerroinmatriisin lävistäjäalkiot ovat nollia, koska pinnat ovat suoria. Iterointi suppenee nopeasti ja näin käy yleisesti aina.

Lämpövuotot pinoista ovat kaavan (46) mukaan

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \varepsilon \sigma T_1^4 - \varepsilon (F_{1 \rightarrow 2} J_2 + F_{1 \rightarrow 3} J_3) = -102,5 \text{ kW/m}^2 \\ \phi_2 &= \varepsilon \sigma T_2^4 - \varepsilon (F_{2 \rightarrow 1} J_1 + F_{2 \rightarrow 3} J_3) = -53,9 \text{ kW/m}^2 \\ \phi_3 &= \varepsilon \sigma T_3^4 - \varepsilon (F_{3 \rightarrow 1} J_1 + F_{3 \rightarrow 2} J_2) = 156,4 \text{ kW/m}^2 .\end{aligned}\quad (60)$$

Kuumimmasta pinnasta lämpöä säteilee kahteen kylmempään pintaan. Vuoarvojen summa on nolla.

Esitetty laskentaperiaate voidaan laajentaa kolmiopoikkileikkauksesta tapaukseen, jossa poikkileikkaus on nelikulmio tai yleinen monikulmio.

Esimerkki 10: Säteilylämmönsiirto kahden sisäkkäisen sylinterin välissä

Lasketaan kahden samankeskisen pitkän sylinterin 1 ja 2 välinen säteilylämmönsiirto (kuva 12, sisempi sylinteri 1). Esimerkissä 1 määritettiin näkyvyyskertoimiksi $F_{1 \rightarrow 1} = 0$, $F_{1 \rightarrow 2} = 1$, $F_{2 \rightarrow 1} = A_1/A_2 = r_1/r_2$ ja $F_{2 \rightarrow 2} = 1 - A_1/A_2$. Pintojen 1 ja 2 radiositeeteille voidaan kirjoittaa kaavan (45) mukaan

$$\begin{aligned}J_1 &= \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) (F_{1 \rightarrow 1} J_1 + F_{1 \rightarrow 2} J_2) \\ J_2 &= \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2) (F_{2 \rightarrow 1} J_1 + F_{2 \rightarrow 2} J_2) .\end{aligned}\quad (61)$$

Näkyvyyskertoimien indeksit vaihtuvat sovellettaessa reprookkilausetta. Ratkaisemalla esimerkiksi J_2 saadaan

$$J_2 = \frac{E_2 + (1 - \varepsilon_2) F_{2 \rightarrow 1} E_1}{\varepsilon_1 F_{2 \rightarrow 1} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 F_{2 \rightarrow 1}} .\quad (62)$$

Nettolämpövuoto sisäpinnalta 1 pois päin on emittoituvan ja heijastuvan vuon erotus, ts. kaavan (46) mukaan

$$\phi_1 = E_1 - \varepsilon_1 F_{1 \rightarrow 2} J_2 = E_1 - \varepsilon_1 J_2 ,\quad (63)$$

josta saadaan

$$\phi_1 = \frac{\varepsilon_2 E_1 - \varepsilon_1 E_2}{\varepsilon_1 F_{2 \rightarrow 1} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 F_{2 \rightarrow 1}} = \frac{\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4}{\frac{F_{2 \rightarrow 1}}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} - F_{2 \rightarrow 1}} = \varepsilon_{tot} \sigma (T_1^4 - T_2^4) .\quad (64)$$

Kokonaisemissiviteetille saadaan ($F_{2 \rightarrow 1} = A_1/A_2 = r_1/r_2$)

$$\varepsilon_{tot} = \frac{1}{\frac{F_{2 \rightarrow 1}}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} - F_{2 \rightarrow 1}} = \frac{1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 (A_2/A_1)}}. \quad (65)$$

Jos sylintereiden välinen rako tulee pieneksi, $A_1/A_2 = r_1/r_2 \rightarrow 1$ ja kokonaisemissiviteetin kaava (65) palautuu tasotapauksen kaavaksi (54).

Jos esimerkiksi sisäsyylinterin säde $r_1 = 0,525$ m, raon paksuus 10 mm eli ulkosyylinterin säde $r_2 = 0,535$ m, $\varepsilon_1 = 0,3$ ja $\varepsilon_2 = 0,8$, on $\varepsilon_{tot} = 0,2794$. Kaavasta (54) saadaan $\varepsilon_{tot} = 0,2790$. Jos raon paksuus on 50 mm, kaavasta (65) saadaan $\varepsilon_{tot} = 0,2808$. Kaavasta (54) saadaan siis riittävän tarkkoja tuloksia käytännössä esiintyvillä raon paksuuksilla.

Pinnasta 1 lähteväksi lämpötehoksi saadaan kertomalla lämpövuoto (64) A_1 :llä

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{1 \rightarrow 2}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}. \quad (66)$$

Pintojen ei tarvitse olla ympyrän muotoisia sylintereitä. On riittävää, kun sisällä oleva pinta on kupera, jolloin ei esiinny näkyvyyskerrointa sen itsensä suhteen. Pinnat voivat olla myös kolmiulotteisia ja edellä olevat kaavat pätevät edelleenkin, kunhan sisempi pinta on kupera. Lämpötilojen tulee olla vakioita kummallakin pinnalla erikseen.

Esimerkki 11: Säteilylämmönsiirto kahden polttoainesauvan välillä

Lasketaan kahden pitkän yhdensuuntaisen polttoainesauvan (kuva 10) välinen säteilylämmönsiirto. Oletetaan, että toisen sauvan lämpötila on $20^\circ\text{C} = 293,15$ K ja toisen $500^\circ\text{C} = 773,15$ K. ZrO_2 -pinnan emissiviteetiksi oletetaan $\varepsilon = 0,6$. Sauvan ulkohalkaisija on $2r = 10,3$ mm ja sauvojen välinen etäisyys 13 mm, jolloin sauvojen välinen lyhin etäisyys on $s = 2,7$ mm. Esimerkissä 6 johdetuista kaavoista (39) ja (40) (kuperille pinnoille $F_{1 \rightarrow 1} = F_{2 \rightarrow 2} = 0$)

$$X = 1 + \frac{s}{2r}$$

$$F = F_{1 \rightarrow 2} = F_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{\pi} \left(\sin^{-1} \frac{1}{X} + \sqrt{X^2 - 1} - X \right) \quad (67)$$

saadaan näkyvyyskerroimeksi $F = 0,1345$. Pintojen 1 ja 2 radiositeeteille saadaan kaavasta (45)

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon) F J_2 \\ J_2 &= \varepsilon \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon) F J_1, \end{aligned} \quad (68)$$

joista ratkaisemalla saadaan edelleen

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon \sigma \frac{T_1^4 + (1 - \varepsilon) F T_2^4}{1 - (1 - \varepsilon)^2 F^2} = 12,20 \text{ kW/m}^2 \\ J_2 &= \varepsilon \sigma \frac{T_2^4 + (1 - \varepsilon) F T_1^4}{1 - (1 - \varepsilon)^2 F^2} = 0,908 \text{ kW/m}^2. \end{aligned} \quad (69)$$

Sauvojen pinnoista lähteväksi nettolämpövuoksi saadaan kaavasta (46)

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \varepsilon \sigma T_1^4 - \varepsilon F J_2 = 12,08 \text{ kW/m}^2 \\ \phi_2 &= \varepsilon \sigma T_2^4 - \varepsilon F J_1 = -0,73 \text{ kW/m}^2. \end{aligned} \quad (70)$$

Pintojen emissiovuot ovat

$$\begin{aligned} E_1 &= \varepsilon \sigma T_1^4 = 12,15 \text{ kW/m}^2 \\ E_2 &= \varepsilon \sigma T_2^4 = 0,25 \text{ kW/m}^2. \end{aligned} \quad (71)$$

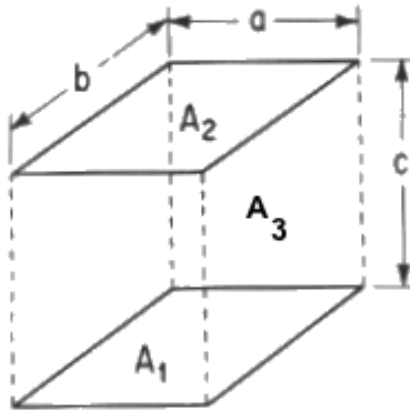
Viileämpi sauva jäädyttää lämpimämpää sauvaa lämpövuon arvolla $0,07 \text{ kW/m}^2$, ja lämpimämpi sauva lämmittää viileämpää sauvaa lämpövuon arvolla $0,97 \text{ kW/m}^2$. Kummankin sauvan pinnan lämpötila oletetaan vakioksi kehän ympäri. Tämä on käytännössä mahdollista vain, jos suojakuoren lämmönjohtavuus on riittävän hyvä tasaamaan lämpötilan kehän suunnassa.

Esimerkki 12: Säteilylämmönsiirto kolmiulotteisessa tapauksessa

Esimerkkinä kolmiulotteisesta tapauksesta lasketaan kuvassa 13 esitettyjen pintojen A_1 , A_2 ja A_3 välinen säteilylämmönsiirto. Oletetaan, että lämpötilat T_1 , T_2 ja T_3 ovat erikseen vakioita pohjapinnalla A_1 , yläpinnalla A_2 ja pystypinnoilla, joiden yhteispinta-ala on A_3 . Valitaan $a = 7,8 \text{ m}$, $b = 9,2 \text{ m}$ ja $c = 9,5 \text{ m}$. Kahden identtisen vastakkain olevan suorakaiteen välinen näkyvyyskerroin on (Howell 2012)

$$F_{1-2} = \frac{2}{\pi XY} \left\{ \ln \left[\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2} \right]^{1/2} + X\sqrt{1+Y^2} \tan^{-1} \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} \right. \\ \left. + Y\sqrt{1+X^2} \tan^{-1} \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} - X \tan^{-1} X - Y \tan^{-1} Y \right\} \quad (72)$$

missä $X = a/c = 0,821$ ja $Y = b/c = 0,964$. Näillä arvoilla näkyvyyskerroimeksi alapinnalta yläpinnalle ja toisinpäin saadaan $F_{1 \rightarrow 2} = F_{2 \rightarrow 1} = 0,171$ (jos näkyvyyskerroin lasketaan likimäärin kaavasta 18 asettamalla kulmat nolliksi, siis $q_1 = q_2 = 0$, $A_2 = ab$ ja $r = c$, saadaan $F_{1 \rightarrow 2} = 0,253$). Soveltamalla summäsääntöä



Kuva 13. Säteilylämmönsiirto suorakaiteen muotoisten pintojen A_1 , A_2 ja A_3 välillä.

näkyvyyskerroimeksi alapinnalta A_1 tai yläpinnalta A_2 sivupinnoille A_3 saadaan $F_{1 \rightarrow 3} = 1 - F_{1 \rightarrow 2} = F_{2 \rightarrow 3} = 0,829$. Soveltamalla resiprookkisääntöä saadaan $F_{3 \rightarrow 1} = A_1/A_3 \cdot F_{1 \rightarrow 3} = A_1/A_3 \cdot (1 - F_{1 \rightarrow 2}) = F_{3 \rightarrow 2} = 0,184$. Koveran pinnan 3 näkyvyyskerroin itsensä suhteen on $F_{3 \rightarrow 3} = 1 - F_{3 \rightarrow 1} - F_{3 \rightarrow 2} = 1 - 2 A_1/A_3 \cdot (1 - F_{1 \rightarrow 2}) = 0,631$. Yhden tunnetun näkyvyyskerroimen (72) avulla voitiin siis määrittää kaikki muut näkyvyyskerroimet. Yhteenkoottuna näkyvyyskerroimet ovat

$$\begin{bmatrix} F_{1-1} & F_{1-2} & F_{1-3} \\ F_{2-1} & F_{2-2} & F_{2-3} \\ F_{3-1} & F_{3-2} & F_{3-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & F_{1-2} & 1 - F_{1-2} \\ F_{1-2} & 0 & 1 - F_{1-2} \\ \frac{A_1}{A_3} (1 - F_{1-2}) & \frac{A_1}{A_3} (1 - F_{1-2}) & 1 - 2 \frac{A_1}{A_3} (1 - F_{1-2}) \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Tasopinnoilla A_1 ja A_2 ei ole näkyvyyskertoimia itsensä suhteen (nollat matriisissa). Pintojen radiositeetiksi saadaan

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) (F_{1 \rightarrow 1} J_1 + F_{1 \rightarrow 2} J_2 + F_{1 \rightarrow 3} J_3) \\ J_2 &= \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2) (F_{2 \rightarrow 1} J_1 + F_{2 \rightarrow 2} J_2 + F_{2 \rightarrow 3} J_3) \\ J_3 &= \varepsilon_3 \sigma T_3^4 + (1 - \varepsilon_3) (F_{3 \rightarrow 1} J_1 + F_{3 \rightarrow 2} J_2 + F_{3 \rightarrow 3} J_3). \end{aligned} \quad (74)$$

Tästä lineaarisesta yhtälöryhmästä radiositeetit J_1 , J_2 ja J_3 voidaan ratkaista eliminointiteknikalla tai iteratiivisesti. Tämän jälkeen pintojen lämpövoiksi saadaan

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \varepsilon_1 \sigma T_1^4 - \varepsilon_1 (F_{1 \rightarrow 1} J_1 + F_{1 \rightarrow 2} J_2 + F_{1 \rightarrow 3} J_3) \\ \phi_2 &= \varepsilon_2 \sigma T_2^4 - \varepsilon_2 (F_{2 \rightarrow 1} J_1 + F_{2 \rightarrow 2} J_2 + F_{2 \rightarrow 3} J_3) \\ \phi_3 &= \varepsilon_3 \sigma T_3^4 - \varepsilon_3 (F_{3 \rightarrow 1} J_1 + F_{3 \rightarrow 2} J_2 + F_{3 \rightarrow 3} J_3). \end{aligned} \quad (75)$$

Jos esimerkiksi $T_1 = 400 \text{ °C}$ ($= 673 \text{ K}$), $T_2 = 30 \text{ °C}$ ja $T_3 = 150 \text{ °C}$ ja kaikki emissiviteetit ovat $\varepsilon_j = 0,8$, alapinnan lävistävä lämpöteho ylöspäin on 477 kW, yläpinnan lävistävä lämpöteho (ylöspäin) on 248 kW ja pystyseinämät lävistävä (ulospäin) 229 kW. Summateho on nolla ($477 \text{ kW} - 248 \text{ kW} - 229 \text{ kW} = 0$). Tässä esimerkissä pintojen lämpötilat oletettiin vakioiksi.

Jos halutaan laskea myös seinämien sisälämpötiloja, se käy joissakin tapauksissa siten, että lasketaan kullekin seinämälle erikseen yksiulotteisella lämmönjohtumismallilla lämpötilaprofiili seinämän sisällä seinämää vastaan kohtisuorassa suunnassa. Kuhunkin pintaan kohdistetaan lämpövuoto (kaavat 75) ja aika-askelleen jälkeen saadaan erikseen kullekin pinnalle syvyysuunnassa uusi pintalämpötila, jolla lasketaan uudet radiositeetit ja edelleen uudet lämpövuotot. Tällaisella transienttianalyysillä voidaan simuloida lämpötilojen kehitystä. Yksiulotteisen mallin toinen pää on seinämän pinnassa ja siihen kohdistetaan lämpövuoto. Toiseen päähän asetetaan tilanteeseen sopiva reunaehto (tunnettu lämpötila tai lämpöeristys eli adiabaattinen ehto).

Näkyvyyskertoimen määrittäminen kolmiulotteisessa tapauksessa on monimutkaista (vrt. kaava 72). Numeerisessa analyysissä voidaan soveltaa kaavoja (18) riittävän pienien pintojen välillä. Kirjallisuudessa on myös viitteitä crossed strings -menetelmän soveltamisesta kolmiulotteisiin tapauksiin.

Korkeissa lämpötiloissa säteilylämmönsiirto pyrkii tasaamaan pintojen välisiä lämpötilaeroja. Tämä aiheutuu säteilylämmönsiirtoa kuvaavan Stefanin-Boltzmannin yhtälön riippuvuudesta absoluuttisen lämpötilan neljännestä potenssista.

2. Säteilylämmön käsittelystä tietokoneohjelmassa

Edellä on tarkasteltu säteilylämmönsiirtoa tapauksissa, joissa säteilypintojen lämpötilat ovat tunnettuja. Mallinnettaessa tapauksia, joissa on lämpöä johtavia rakenteita säteilypintojen takana, säteilypintojen lämpötilat ovat tuntemattomia. Tällöin säteilylämmönsiirto tulee kytkeä laskentaprosessiin. Lisäksi voi esiintyä väliaineen virtauksia, joita tässä julkaisussa ei kuitenkaan käsitellä.

2.1 Kontrollitulavuusmenetelmä

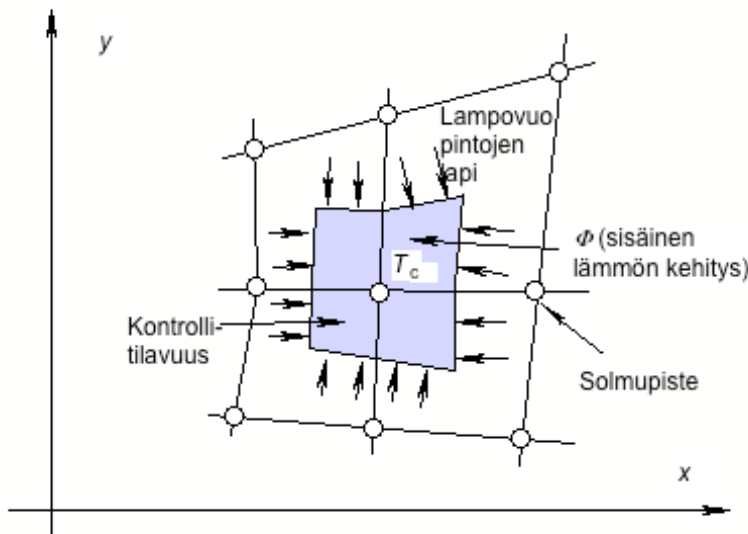
Tarkastellaan kontrollitulavuusmenetelmää lähinnä säteilylämmönsiirron laskennan kannalta. Kontrollitulavuusmenetelmässä, tai lyhyesti tilavuusmenetelmässä, on kyse siitä, että diskreetointipisteen ympäriltä rajataan sopivasti tarkastelualue, jolle muodostetaan energian säilyvyysyhtälö. Differenssimenetelmä lämmönjohtumisprobleemaan sovellettuna on myös kontrollitulavuusmenetelmä. Virtauslaskennassa on erilaisia tapoja valita diskreetointipisteet. Lämmönjohtuminen on sen verran yksinkertainen ilmiö, että siinä diskreetointipisteet voidaan valita tarkastelualueen reunoilta ja sisältä kuten elementtimenetelmässä. Mitään apupisteitä reunojen ulkopuolelta ei tarvita reunaehtojen asettelussa.

2.2 Yleisiä periaatteita

Avaintekijöitä lämmönjohtumisen tehokkaassa laskennassa ovat muodoltaan ei-suorakulmainen ns. strukturoimaton verkko, täysin implisiittinen ratkaisumenetelmä sekä reunaehtojen käsittelytekniikka. Tässä julkaisussa esitetyssä numeerisiin analyyseihin kehityksessä tietokoneohjelmassa nämä on toteutettu ehkä tehokkaimmalla mahdollisella tavalla. Elementtimenetelmän piirteitä on hyödynnetty ohjelman laadinnassa, mm. elementtien numerointi mahdollistaa strukturoimattoman epäsäännöllisen verkon. Ohjelma on kehitetty lämpötransientin laskentaan, mutta se soveltuu erittäin hyvin myös stationääritilojen laskentaan. Silloin otetaan niin monta aika-askelta, että lämpötila ei muutu missään solmussa asetettua toleranssia (esimerkiksi $0,001^{\circ}\text{C}$) enempää.

Erittäin tärkeä periaate lämmönjohtumisprobleeman numeerisen ratkaisun formuloinnissa on, että yhtälöt ovat säilymismuodossa, mikä tarkoittaa, että mallin sisälle ei muodostu olemattomia lämmönlähteitä tai lämpönieluja. Virhetilanne voi syntyä esimerkiksi, jos laskenta-alueita kytketään yhteen lämpövuon jatkuvuusehdoilla vain yhdessä suunnassa. Rajapinnat tulee käsitellä myös kontrollitilavuuk-sien avulla.

Numeeriseen ratkaisuun liittyy tiettyjä ongelmia. Verkon generointi ja tiheyden valinta ei ole yksinkertainen asia. Verkon riittävä tiheys selvitetään yleensä siten, että verkkoa tihennetään, kunnes tulokset eivät enää muutu. Aika-askeleen pituus on myös yksi laskennan parametreista. Aika-askeleen pituus voi olla myös muuttuva laskennan nopeuttamiseksi.



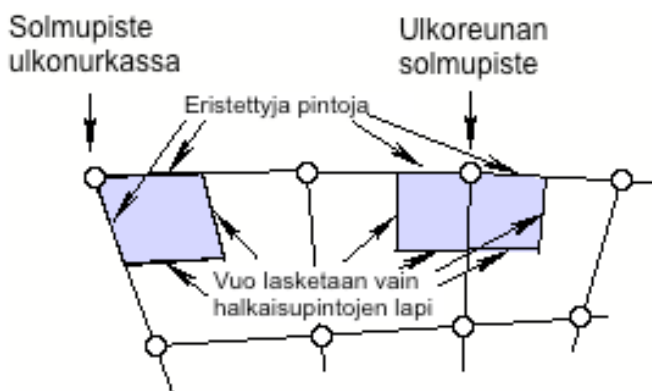
Kuva 14. Lämpövuon kontrollitilavuuteen (väritetty alue) ja sisällä generoituva teho.

Kontrollitilavuus rajataan kuvassa 14 esitetyllä tavalla tarkastelupisteeseen liittyvien elementtien sivujen puolivälien kautta käyville tasoille. Jos kontrollitilavuus on kuvan 14 mukaisesti tarkastelualueen sisällä ja joka puolelta elementtien ympäröimä, kontrollitilavuuteen varastoituvan tehon sekä kaikki rajapinnat lävistävän (johtumalla) ja mahdollisesti sisällä generoituvan tehon tasapainoyhtälö on

$$V c_v \frac{\partial T_c}{\partial t} = V \frac{\partial E_c}{\partial t} = \oint_A \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right) dA + \int_V \Phi dV. \quad (76)$$

Integraalit muuttuvat käytännössä summalausekkeiksi. Alaindeksi c (control) viittaa tarkasteltavaan solmupisteeseen. Vasemmalla esiintyvä tilavuuden ja kapasiteetin tulo lasketaan summaamalla tarkastelupisteeseen liittyvistä elementeistä tulevat vaikutukset. Elementeillä voi olla eri materiaaliominaisuuksia, siis materiaalin rajapintoja voi kulkea tarkastelupisteen kautta elementtien reunoja pitkin. Entalpiamuoto (kaavan toinen termi), joka on kapasiteetin integraali lämpötilan suhteen, on parempi suure faasimuutostarkasteluissa kuin kapasiteetin ja lämpötilan käyttö, sillä faasimuutoksessa kapasiteetti riippuu hyvin voimakkaasti lämpötilasta.

Yhtälöä (76) sovelletaan tarkastelupisteen 1 uuden ajanhetken lämpötilan laskemiseen. Jos tarkastelupisteen lämpötila sattuu olemaan tunnettu, yhtälöä ei ole tarpeen soveltaa eikä mitään muita toimenpiteitä tarkastelupisteen osalta tarvita kuin tunnetun lämpötilan asettaminen tarkastelupisteelle, minkä jälkeen voidaan siirtyä seuraavaan pisteeseen. Kussakin tarkastelusolmuun liittyvässä elementissä on kaksi reunapintaa, joiden lävitse muodostetaan lämpövuon yhtälöt. Reunapinnat lasketaan yhdistämällä suorilla elementin keskipiste ja sivujen keskipisteet. Eristetty reunapiste, johon liittyy yksi tai kaksi elementtiä, on mahdollisimman helppo käsitellä. Se ei edellytä mitään lisätoimenpiteitä, kuten lämpötilan derivaatan asettamista nolaksi reunapintaa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Eristetyllä sivulla ei ole elementin halkaisupintaa, joten vuotakaan ei esiinny (kuva 15). Eristetyn reunapisteen lämpötila tietenkin lasketaan. Säteilypinta kulkee tarkastelupisteen kautta.



Kuva 15. Lämpövuon laskennan havainnollistus reunoihin liittyvien elementtien halkaisupintojen läpi.

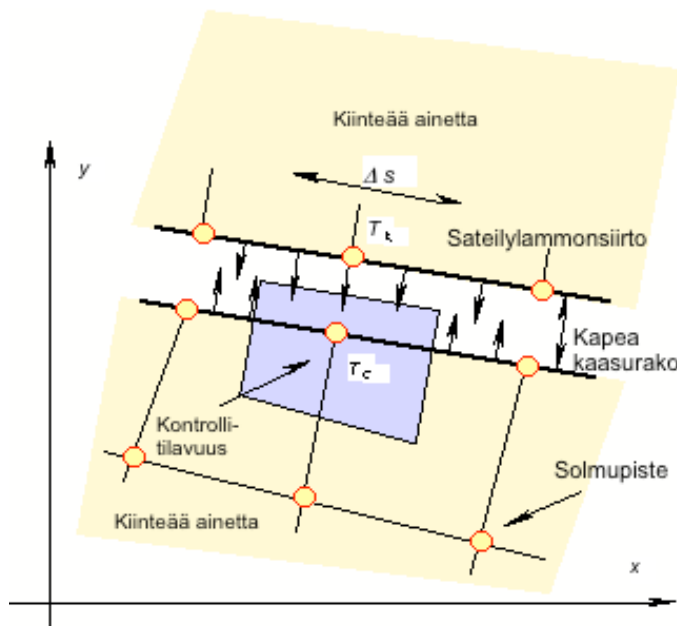
Yhteenvedona todettakoon, että ratkaisumenetelmä on täysin implisiittinen (myös reunaehtojen osalta) ja menetelmä on ehdoitta stabiili. Jos aika-askel on liian pitkä, yksittäisen diskreetointipisteen lämpötilan aikariippuvuusikäyrään tulee värähtelyä. Sopiva aika-askel selviää lähinnä vain kokeilemalla. Silloin kun stabiiliusongelmaan joudutaan, syy on yleensä liian pitkä aika-askel analyysin alussa.

2.3 Reunaehtojen käsittely

Implisiittisessä menetelmässä reunaehdot käsitellään ratkaistavana olevan aika-askelen lopussa ilmaistuilla lämpötiloilla ja lämmönjohtumisominaisuuksilla. Lämpötilojen laskentaa käsittelevässä kirjallisuudessa puhutaan varsin vähän reunaehdoista, vaikka niiden käsittely on ratkaisun keskeinen osa. Tässä yhteydessä tarkastellaan vain säteilyreunaehtoja.

2.2.1 Kapea sisäinen säteilyrajo

Kapean sisäisen säteilyrajo tapauksessa lämpöä virtaa kapean sisäisen rajo yli vastinpintojen välillä säteilemällä ja kaasussa johtamalla. Kontrollitilavuus ulotetaan rajo puolelle (kuva 16), jolloin johtuminen raossa olevassa kaasussa tulee otetuksi huomioon. Näkyvyyskerroin pintojen välillä voidaan olettaa ykkösen suuruiseksi.



Kuva 16. Säteily kapean sisäisen rajo yli.

Oletetaan, että rajo läpinäkyvässä kaasussa lämmönjohtuminen ja säteilylämmön siirto eivät kytkeydy toisiinsa ja niiden vaikutukset voidaan summata. Energiasapainoyhtälö on tällöin

$$V c_v \frac{\partial T_c}{\partial t} = \oint_A \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right) dA + \int_V \Phi dV + \varepsilon_{tot} \sigma (T_k^4 - T_c^4) \Delta s, \quad (77)$$

jossa T_k on vastinsolmun lämpötila. Sisäinen (esimerkiksi pelletin) volumetrinen lämpötehoiteisuus on Φ . Säteilyä vastaanottavan laskenta-alueen leveys on Δs (säteilypinta lävistää kontrollitilavuuden tai -alueen).

Tarkastelupisteen c lämpötilan aikaderivaatta aika-askeleen lopussa voidaan kirjoittaa kahden perättäisen ajanhetken lämpötilan avulla seuraavasti

$${}^{t+\Delta t} \frac{\partial T_c}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} ({}^{t+\Delta t} T_c - {}^t T_c). \quad (78)$$

Voidaan soveltaa myös kolmen pisteen kaavaa, jolloin derivaatta tulee ilmaistuksi tarkemmin. Myös aika-askeleen pituus voi muuttua. Kun tehdään kontrollitilavuusmenetelmän mukaiset operaatiot, kaava (76) voidaan kirjoittaa toisaalta muotoon

$$c_v \frac{\boxed{{}^{t+\Delta t} T_c} - {}^t T_c}{\Delta t} = C \cdot \boxed{{}^{t+\Delta t} T_c} + RHS + \frac{\Delta s}{V} \varepsilon_{tot} \sigma (T_k^4 - \boxed{{}^{t+\Delta t} T_c^4}) \quad (79)$$

Ratkaistavana oleva lämpötila on kehystetty. Termit C (Center) ja RHS (Right Hand Side) muodostuvat kontrollitilavuustarkastelussa. Termi C on ratkaistavan lämpötilan kerroin. Termi RHS sisältää ratkaistavasta lämpötilasta riippumattomia termejä (lähdetermi). Lämpökapasiteetti c_v määritetään aika-askeleen lopussa kuten myös termit C ja RHS täysin implisiittisen menetelmän mukaisesti. V on kontrollitilavuus (ala) ja Δs on vaikutuspinta-ala. Kaavasta (79) saadaan edelleen

$$\frac{\Delta s}{V} \varepsilon_{tot} \sigma \boxed{{}^{t+\Delta t} T_c^4} + \left(\frac{c_v}{\Delta t} - C \right) \boxed{{}^{t+\Delta t} T_c} = RHS + \frac{c_v}{\Delta t} {}^t T_c + \frac{\Delta s}{V} \varepsilon_{tot} \sigma T_k^4. \quad (80)$$

Tuntematon lämpötila ratkaistaan neljännen asteen polynomista Newtonin iteroinnilla (suppenee aina hyvin). Ensimmäinen ja viimeinen termi liittyvät säteilystä kontrollialueeseen tulevaan nettolämpötehoon. Pintojen c ja k välinen kokonaisuusmismiteetti lasketaan kaavasta (54). Jos säteilyrakoa ei ole, kaava yksinkertaistuu muotoon

$$\left(\frac{c_v}{\Delta t} - C \right) \boxed{{}^{t+\Delta t} T_c} = RHS + \frac{c_v}{\Delta t} {}^t T_c. \quad (81)$$

Jos pyörähdystapauksessa ilmarako ei ole hyvin kapea, on toisen säteilypinnan lämpövuoto kerrottava raon reunaympyröiden säteiden suhteella.

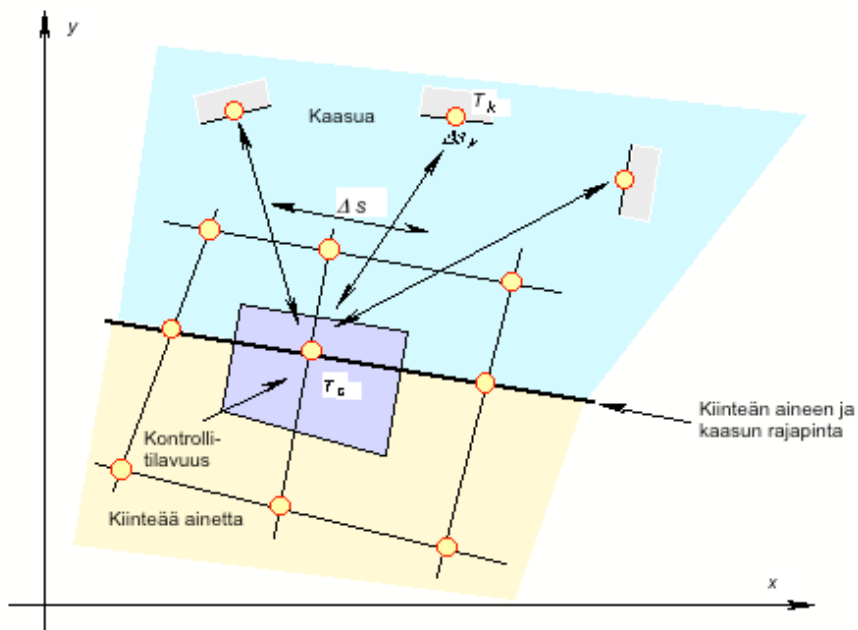
2.2.2 Yleinen säteilypintatapaus

Yleisen säteilypinnan (kuva 17) tapauksessa tarkasteltavan kontrollitilavuuden lävistävään rajapintaan c kohdistuva nettosäteilylämpövuoto (kaava 46)

$$\phi_c = \varepsilon_c (\sigma T_c^4 - \sum_{k=1}^K F_{c \rightarrow k} J_k) \quad (82)$$

lisätään positiivisena sisäänpäin johtumistermiin ja mahdolliseen sisäiseen lämmönkehitykseen, jolloin kaavaa (77) vastaavaksi kaavaksi tulee

$$V_{c_v} \frac{\partial T_c}{\partial t} = \oint_A (\lambda \frac{\partial T}{\partial n}) dA + \int_V \Phi dV + \varepsilon_c (\sum_{k=1}^K F_{c \rightarrow k} J_k - \sigma T_c^4) \Delta s. \quad (83)$$



Kuva 17. Yleinen säteilypintatapaus (säteilypinta lävistää kontrollitilavuuden tai kontrollialueen).

Kaavaa (80) vastaavaksi kaavaksi saadaan

$$\frac{\Delta s}{V} \varepsilon_c \sigma \boxed{^{t+\Delta t} T_c^4} + \left(\frac{c_v}{\Delta t} - C \right) \boxed{^{t+\Delta t} T_c} = RHS + \frac{c_v}{\Delta t} T_c + \frac{\Delta s}{V} \varepsilon_c \sum_{k=1}^K F_{c \rightarrow k} \boxed{^{t+\Delta t} J_k}, \quad (84)$$

missä K on kontrollitilavuuden rajapintaan näkyvien muiden pintojen lukumäärä. Koverassa tapauksessa summatermissä esiintyy myös näkyvyyskerroin $F_{C \rightarrow C} > 0$ kontrollitilavuuden rajapinnasta itsensä suhteen.

Säteilystä vastaanottavan laskenta-alueen leveys (pinta-ala) on Δs . Muuttuvat suureet on kehystetty kaavassa (84). On ilmeistä, että vain iteratiivinen ratkaisu on mahdollinen. Pyritään ratkaisemaan kontrollipinnan lämpötila yhtälöstä. Tätä varten pidetään radiositeetit toistaiseksi muuttumattomina. Tällöin rajapinnan uusi lämpötila $^{t+\Delta t} T_c$ ratkaistaan sen suhteen neljännen asteen polynomista (84) Newtonin iteroinnilla. Tässä vaiheessa kontrollipisteen radiositeetissa (kaava 45) kontrollipisteen lämpötila on muuttunut ja muiden pintojen radiositeetit pidetään ennallaan. Seuraavaksi päivitetään tarkasteltavan kontrollipinnan c radiositeetti J_c kirjoittamalla sille aika-askeleen alussa ja lopussa

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^t J_c = \varepsilon_c \sigma {}^t T_c^4 + (1 - \varepsilon_c) \left(\sum_{k=1}^K F_{c \rightarrow k} {}^t J_k + F_{c \rightarrow c} {}^t J_c \right) \\ {}^{t+\Delta t} J_c = \varepsilon_c \sigma {}^{t+\Delta t} T_c^4 + (1 - \varepsilon_c) \left(\sum_{k=1}^K F_{c \rightarrow k} {}^t J_k + F_{c \rightarrow c} {}^{t+\Delta t} J_c \right). \end{array} \right. \quad (85)$$

Sitä tilannetta varten, että kontrollitilavuuden rajapinta on kovera ja sillä on näkyvyyskerroin itsensä suhteen, kontrollitilavuuden rajapintaan liittyvä termi on otettu erilleen summalausekkeissa. Vähentämällä kaavat toisistaan saadaan

$$\Delta J_c = {}^{t+\Delta t} J_c - {}^t J_c = \frac{\varepsilon_c \sigma ({}^{t+\Delta t} T_c^4 - {}^t T_c^4)}{1 - (1 - \varepsilon_c) F_{c \rightarrow c}}. \quad (86)$$

Jos kontrollitilavuuden rajapinta on kupera, $F_{C \rightarrow C} = 0$. Kontrollipinnan uusi radiositeetti lasketaan kaavasta

$${}^{t+\Delta t} J_c = {}^t J_c + \Delta J_c. \quad (87)$$

Koska kontrollipinnan radiositeetti on näin muuttunut, muutetaan radiositeettia myös niissä pinnoissa, joihin kontrollipinta näkyy. Näiden J -arvot päivitetään kaavasta

$${}^{t+\Delta t} J_k = {}^t J_k + (1 - \varepsilon_k) F_{k \rightarrow c} \Delta J_c, \quad (88)$$

missä otetaan huomioon vain tarkastelupinnan c radiositeetin muutos. Näkyvyyskerroin lasketaan siis k -pinnasta kontrollipinnan suuntaan. Lopuksi kontrollipinnan radiositeetti lasketaan vielä kerran kaavasta

$${}^{t+\Delta t}J_c = \frac{\varepsilon_c \sigma T_c^4 + (1 - \varepsilon_c) \sum_{k=1}^K F_{c \rightarrow k} {}^{t+\Delta t}J_k}{1 - (1 - \varepsilon_c) F_{c \rightarrow c}}, \quad (89)$$

koska siihen näkyvien pintojen radiositeetit ovat muuttuneet. Jos kontrollitilavuuden rajapinta on kupera, $F_{c \rightarrow c} = 0$.

Periaatteessa kaikki pisteet ja kytkennät olisi käytävä lävitse, sillä kaikkien toisensa näkevien pintojen radiositeetit kytkeytyvät toisiinsa. Esitetty iterointi tarkastelupisteen kohdalla on kokeilujen mukaan riittävä ja laskenta konvergoituu, sillä kun siirrytään vuorotellen eri kontrollitilavuuksiin, kytkennät päivittyvät riittävästi.

Iterointia kaavojen (84...89) avulla voitaisiin jatkaa, mutta siitä ei ole hyötyä seuraavasta syystä. Ratkaisussa haetaan koko systeemin tasapainotilaa iteroimalla. Käymällä kontrollipisteet moneen kertaan lävitse radiositeetit päivittyvät samalla moneen kertaan kuten kontrollipisteiden lämpötilatkin. Lämpötilojen iterointia jatketaan niin kauan, kunnes lämpötilojen muutokset tulevat riittävän pieniksi tarkasteltavan aika-askeleen lopussa. Kyse on siitä, että radiositeetteja iteroidaan riittävästi laskentaprosessissa ja tässä eri kytkennät tulevat riittävästi läpikäydyiksi. Laskentaprosessissa pyritään välttämään yhtälöryhmiä ja ratkaisemaan kerrallaan lämpötila yhtälöstä (84). Näin saatu lämpötila otetaan välittömästi käyttöön siirryttäessä seuraavaan kontrollitilavuuteen.

Iteratiivisessa ratkaisussa kaikki kytkennät (heijastumisetkin) tulevat lopulta otetuksi huomioon. Iteratiivisen ratkaisun etuna on, että ei ole tarpeen muodostaa suurta yhtälöryhmää, jonka hallinta ja ratkaiseminen olisi monimutkaista.

Kuten edellä esitettiin, numeerisessa mallissa tarvitaan sekä radiositeettia (emitoituvan ja heijastuvan säteilyn summa) pintojen välisen vuorovaikutuksen kuvaamiseen että nettosäteilyä (pinnan lävistävä säteilylämpövuoto sisäänpäin) pinnan vuotyypin reunaehdon asettamisessa.

Analyyysin alussa tunnetuilla alkulämpötiloilla radiositeetit iteroidaan kaavasta

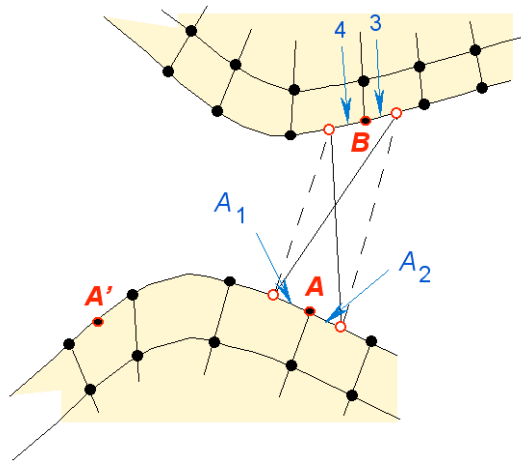
$$J_i = \frac{\varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) \sum_{k=1}^K F_{i \rightarrow k} J_k}{1 - (1 - \varepsilon_c) F_{i \rightarrow i}}. \quad (90)$$

Jos kontrollitilavuuden i rajapinta on kupera, $F_{i \rightarrow i} = 0$.

Implisiittisessä menetelmässä reunaehdot käsitellään ratkaistavana olevan aika-askeleen lopussa ilmaistuilla lämpötiloilla ja lämmönjohtumisominaisuuksilla.

2.4 Näkyvyyskertoimien laskennasta

Tarkastellaan näkyvyyskertoimien laskentaa kaksikulotteisiin tasotapauksiin tehdyssä tietokoneohjelmassa. Säteilypintojen lämpötilojen vaihdellessa pintojen eri osissa pinnat jaetaan niin tiheästi osiin, että yksittäisen osan alueella lämpötila on riittävällä tarkkuudella vakio. Solmupisteen lämpötilaa laskettaessa säteilypinta-ala ulotetaan säteilypinnalla olevien viereisten solmu- eli kontrollipisteiden puoliväliin asti (kuva 18). Säteilypinta on siten suoran reunan tapauksessa suora tai kaarevan reunan tapauksessa kupera tai kovera. Näkyvyyskerroin tällaisesta kahdesta alkioista muodostuvasta säteilypinnasta toiseen vastaavaan säteilypintaan voidaan ratkaista tehokkaasti crossed strings -menetelmällä, kuten seuraavassa esitetään.



Kuva 18. Säteily kulma-alkioiden välillä (a) ja esimerkki säteilypinnasta (b, säteilypinta piirretty punaisella).

Pisteen A ympärillä olevien pintojen 1 ja 2, joilla lämpötila oletetaan vakioksi, lähettämät säteilylämpötehot jossakin toisessa lämpötilassa oleville pinnoille 3 ja 4 ovat

$$\begin{aligned}
 w_{1 \rightarrow 3} &= e A_1 F_{1 \rightarrow 3} \\
 w_{1 \rightarrow 4} &= e A_1 F_{1 \rightarrow 4} \\
 w_{2 \rightarrow 3} &= e A_2 F_{2 \rightarrow 3} \\
 w_{2 \rightarrow 4} &= e A_2 F_{2 \rightarrow 4} .
 \end{aligned} \tag{91}$$

jossa A_1 ja A_2 ovat pintojen 1 ja 2 pinta-alat. Pinnan A lähettämä säteilylämpöteho pinnalle B on

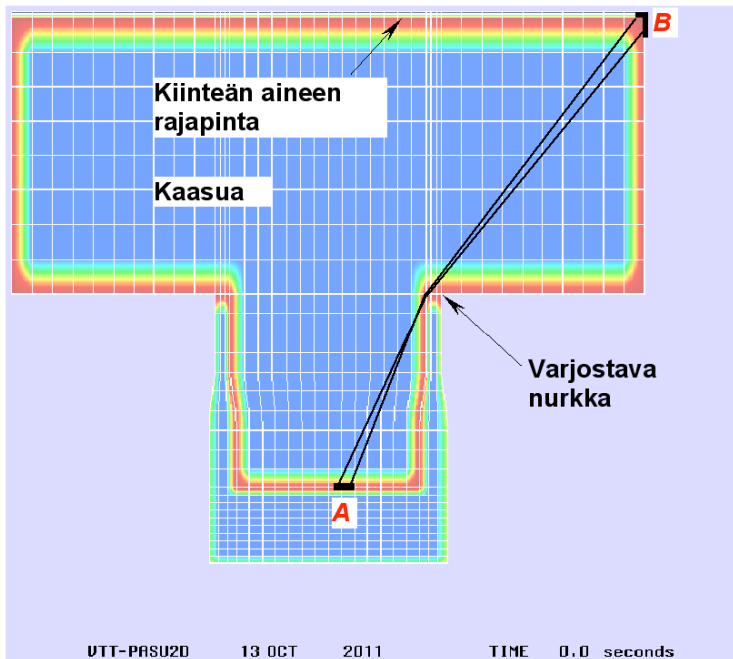
$$\begin{aligned}
 w_{A \rightarrow B} &= w_{1 \rightarrow 3} + w_{1 \rightarrow 4} + w_{2 \rightarrow 3} + w_{2 \rightarrow 4} \\
 &= e [A_1 (F_{1 \rightarrow 3} + F_{1 \rightarrow 4}) + A_2 (F_{2 \rightarrow 3} + F_{2 \rightarrow 4})] \\
 &= e (A_1 + A_2) \left[\frac{A_1}{A_1 + A_2} (F_{1 \rightarrow 3} + F_{1 \rightarrow 4}) + \frac{A_2}{A_1 + A_2} (F_{2 \rightarrow 3} + F_{2 \rightarrow 4}) \right], \quad (92)
 \end{aligned}$$

josta kulma-alkioiden väliseksi näkyvyyskertoimeksi saadaan

$$F_{A \rightarrow B} = \frac{A_1}{A_1 + A_2} (F_{1 \rightarrow 3} + F_{1 \rightarrow 4}) + \frac{A_2}{A_1 + A_2} (F_{2 \rightarrow 3} + F_{2 \rightarrow 4}). \quad (93)$$

Tässä kaavassa esiintyvät neljän janan väliset näkyvyyskertoimet lasketaan crossed strings -menetelmällä.

Jos kuvassa 18 solmupiste A siirtyy kohtaan A', pinnat näkevät toisensa vain osittain. Tällöin crossed strings -menetelmässä "langat" (strings) on pantava kulkemaan pintoja pitkin kuten esimerkiksi 6 tehtiin. Toisena esimerkkinä mainittakoon käytetyn ydinpolttoaineen vesiallasvaraston 2D-poikkileikkaus (kuva 19), jossa syntyy varjostustapauksia säteilypinta-alkioiden sijainnista riippuen.

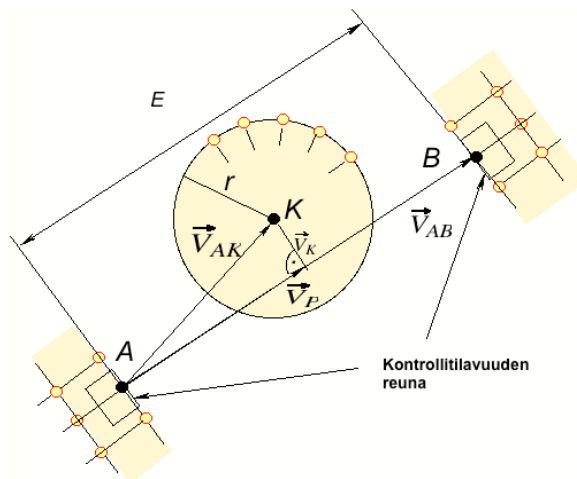


Kuva 19. Esimerkki alkioiden A ja B varjostustapauksesta (säteilypinta piirretty punaisella).

Varjostustapauksessa alkioden päät yhdistetään nurkan kautta käyville "langoilla". Täydellisessä varjostustapauksessa näkyvyyskerroin tulee laskennallisesti negatiiviseksi. Tällöin se asetetaan tietokoneohjelmassa nollan suuruiseksi. Tämä ominaisuus yksinkertaistaa toimintoja tietokoneohjelmassa varjostustapauksessa ja osittainenkin varjostustapaus toimii oikein (on tosin huomattava, että pinta-alkion lämpötila ei ole tarkkaan ottaen vakio, mikä on oletus crossed strings -menetelmän kaavaa johdettaessa). Muodostamalla crossed strings -menetelmän mukaiset pituudet kuvan 19 tapauksessa ja soveltamalla crossed strings -menetelmän laskukaavaa todetaan, että näkyvyyskerroin on nollan suuruinen laskenta-alkioiden A ja B sijaitessa kuvassa 19 esitetyllä tavalla.

2.5 Näkyvyyskerroimien laskennasta polttoainesauvojen välillä

Polttoaine-elementissä on suuri määrä polttoainesauvoja (noin 100). Näiden välisten näkyvyyskerroimien määrittämiseen voitaisiin soveltaa myös crossed strings -menetelmää, mutta se on nyt monimutkaista, kun kahden tarkastelupinnan välillä voi olla useita polttoaineauvoja (lähteessä Carlson, et.al, 1999 on esitetty polttoainesauvojen välisiä näkyvyyskerroimia). Lisäksi reuna-alueilla on otettava huomioon sauvojen ja virtauskanavan välinen säteilylämmönsiirto.



Kuva 20. Sylinterin osuminen kahden toisiinsa säteilevän alkion tielle.

Tarkastellaan kahden pinta-alkion näkyvyyttä, kun niiden välillä on polttoainesauva (kuva 20). Pinta-alkiot voivat olla toisten sauvojen pinnalla tai polttoaine-elementtiä j ympäröivän virtauskanavan pinoilla. Ennen kuin näkyvyyskerroimia ryhdytään määrittämään, tarkistetaan, ettei polttoainesauva varjosta alkioden keskipisteiden

välistä näkymistä. Lasketaan ensin AK-vektorin projektiovektori suunnalle AB (kuva 20) kaavasta

$$\vec{V}_P = (\vec{V}_{AB} \cdot \vec{V}_{AK}) \frac{\vec{V}_{AB}}{E^2}, \quad (94)$$

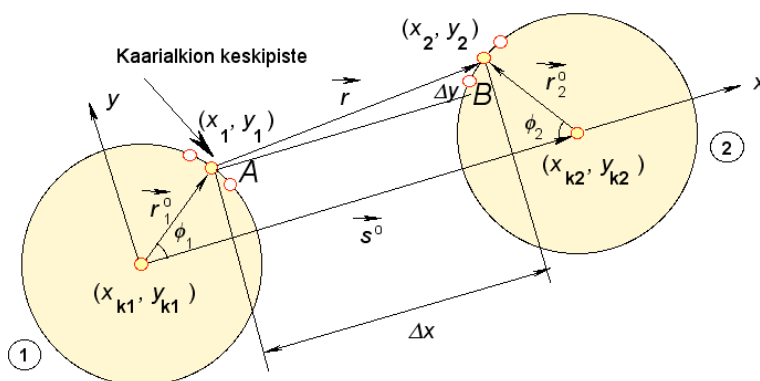
jossa E on pisteiden A ja B välinen etäisyys. Sylinterin keskipisteestä K suoralle AB piirretty kohtisuora vektori on

$$\vec{V}_K = \vec{V}_P - \vec{V}_{AK}. \quad (95)$$

Jos vektorin pituus $|\vec{V}_K|$ on suurempi kuin sylinterin säde, kyseessä ei ole varjostustapaus ja siirrytään laskemaan näkyvyyskertoimia seuraavassa esitettävällä tavalla.

2.5.1 Kahden ympyräsylinterin pinnalla olevan alkion välinen näkyvyyskerroin

Tarkastellaan kahden sylinterin pinnoilla olevien kaarialkioiden (kuva 21) välisen näkyvyyskerroimen määrittämistä. Määrittäminen voitaisiin tehdä tarkasti, mutta koska se on melko monimutkaista, tehdään yksinkertaistettu määrittäminen, joka kuitenkin on riittävän tarkka. Tarkastellaan kaarialkioiden keskipisteiden välistä näkymistä. Lasketaan kulmat ϕ_1 ja ϕ_2 muodostamalla $\cos\phi_1$ ja $\cos\phi_2$, jotka ovat yksikkövektoreiden \vec{r}_1^0 tai \vec{r}_2^0 ja \vec{s}^0 pistetuloja. Jos pistetulo on negatiivinen, kulma $\phi_1 > 90^\circ$ tai $\phi_2 > 90^\circ$ ja kyseinen piste ei näe toista sylinteriä lainkaan. Jos molemmat pisteet näkevät toisensa kuten kuvassa 19, laskentaa jatketaan seuraavasti.



Kuva 21. Sylinterien pinnoilla olevien kaarialkioiden keskipisteiden A ja B välisen näkyvyyskerroimen määrittäminen.

Sylinterin 1 keskipisteestä kehälle piirretty vektori ja sylintereiden 1 ja 2 keskipisteiden välinen vektori ovat

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (x_A - x_{k1}) \vec{i} + (y_A - y_{k1}) \vec{j} \\ \vec{s} &= (x_{k2} - x_{k1}) \vec{i} + (y_{k2} - y_{k1}) \vec{j} .\end{aligned}\quad (96)$$

Kulma ϕ_1 saadaan vektoreiden pistetulon avulla:

$$\cos\phi_1 = \vec{r}_1^0 \cdot \vec{s}^0 (= \vec{s}^0 \cdot \vec{r}_1^0), \quad (97)$$

missä yläindeksi "0" tarkoittaa yksikkövektoria. Jos $\cos\phi_1 < 0$, niin $|\phi_1| \geq \pi/2$ ja sylinterin 1 kehällä oleva piste on takapinnalla näkymättömissä. Koska kosini ei anna kulman ϕ_1 etumerkkiä, muodostetaan vektoreiden \vec{s}^0 ja \vec{r}_1^0 ristitulo. Jos se on positiivinen, kulma ϕ_1 on positiivinen ja jos se on negatiivinen, kulma ϕ_1 on negatiivinen.

Sylinterille 2 saadaan vastaavaan tapaan

$$\begin{aligned}\vec{r}_2 &= (x_B - x_{k2}) \vec{i} + (y_B - y_{k2}) \vec{j} \\ \cos\phi_2 &= \vec{r}_2^0 \cdot \vec{s}^0 (= \vec{s}^0 \cdot \vec{r}_2^0).\end{aligned}\quad (98)$$

Jos $\cos\phi_2 < 0$, $|\phi_2| \geq \pi/2$ ja sylinterin 2 kehällä oleva piste on takapinnalla näkymättömissä. Jos ristitulo $\vec{r}_2^0 \times (-\vec{s}^0) = \vec{s}^0 \times \vec{r}_2^0$ on positiivinen, kulma ϕ_2 on positiivinen ja jos taas se on negatiivinen, kulma ϕ_2 on negatiivinen. Kehällä olevien kaarialkioiden keskipisteiden välisen vektorin \vec{r} komponentit kuvassa 21 esitetyllä tavalla asetetussa paikallisessa xy -koordinaatistossa ovat

$$\begin{aligned}\Delta x &= 2r + s - r(\cos\phi_1 + \cos\phi_2) \\ \Delta y &= r(\sin\phi_2 - \sin\phi_1),\end{aligned}\quad (99)$$

missä s on lyhin sylintereiden välinen etäisyys ja r on sylinterin säde. Pisteiden A ja B välinen yksikkövektori on täten

$$\vec{r} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \vec{j} = \Delta x^0 \vec{i} + \Delta y^0 \vec{j} . \quad (100)$$

Lähtökulman kosini (sylinterin 1 pinnalta) on

$$\begin{aligned}\cos\phi_L &= (\cos\phi_1 \vec{i} + \sin\phi_1 \vec{j}) \cdot (\Delta x^0 \vec{i} + \Delta y^0 \vec{j}) \\ &= \Delta x^0 \cos\phi_1 + \Delta y^0 \sin\phi_1 .\end{aligned}\quad (101)$$

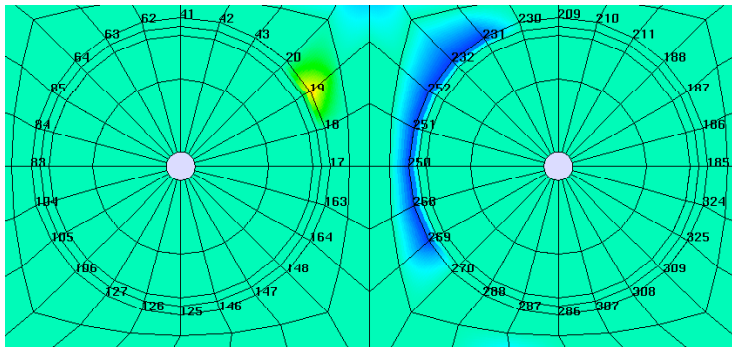
Jos lähtökulma $\phi_L > 90^\circ$, piste 1 ei näy pisteeseen 2. Tulokulman kosini (sylinterin 2 pinnalle) on

$$\begin{aligned} \cos \phi_T &= (-\cos\phi_2 \vec{i} + \sin\phi_2 \vec{j}) \cdot (-\Delta x^o \vec{i} - \Delta y^o \vec{j}) \\ &= \Delta x^o \cos\phi_2 + \Delta y^o \sin\phi_2. \end{aligned} \quad (102)$$

Jos tulokulma $\phi_T > 90^\circ$, piste 2 ei näy pisteeseen 1. Jos kaarialkioiden keskipisteet näkevät toisensa, kaarialkiot eivät välttämättä näe toisiaan koko pituudeltaan. Näkyvyyskerroin lasketaan kaavasta (21)

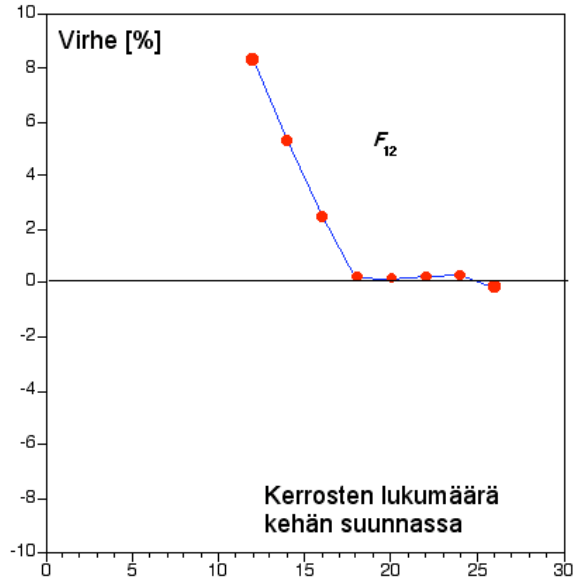
$$F_{A \rightarrow B} = \frac{\cos\theta_L \cos\theta_T}{2r} \Delta a_B, \quad (103)$$

missä Δa_B on kaarialkion pituus jälkimmäisen sylinterin pinnalla. Kuva 22 havainnollistaa kahden polttoainesauvan välistä näkyvyyttä.



Kuva 22. Kahden polttoainesauvan välisen näkyvyyden havainnollistaminen (vasemmanpuoleisen sylinterin keltainen piste "näkee" siniset pisteet oikeanpuoleisessa sylinterissä). Molemmissa sylindereissä on 24 sektoria.

Kuva 23 esittää kokonaisnäkyvyyskerroimen virhettä kaarialkioiden kokonaislukumäärän funktiona. Virhe pienenee käytännössä nolleen, kun kaarialkioiden kokonaislukumäärä on vähintään 18.

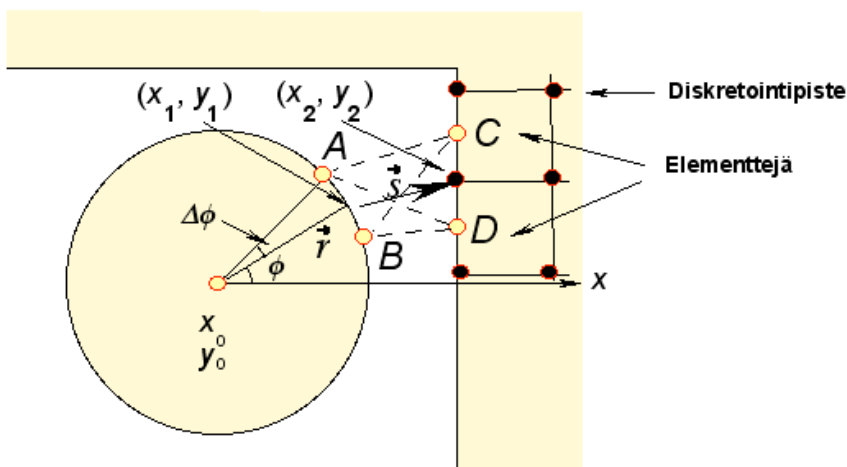


Kuva 23. Kokonaisnäkyvyyskertoimen virhe kaavasta (41) laskettuun tarkkaan arvoon $F_{1,2} = F_{2,1}$ verrattuna kaarialkioiden kokonaislukumäärän funktiona.

2.5.2 Ympyräalkion ja tasoalkion välinen näkyvyyskerroin

Polttoainesauvan ja polttoaine-elementin virtauskanavan välillä on kyse ympyräalkion ja tasoalkion välisestä näkyvyyskertoimesta (kuva 24). Sylinterin keskipisteen koordinaateista käytetään merkintöjä x_0 ja y_0 ja sylinterin kehällä olevan kaarialkion AB keskipisteen koordinaateista merkintöjä x ja y . Näiden pisteiden välinen suora muodostaa vaakatasoon nähden kulman ϕ . Kehäpisteen koordinaatit ovat

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \cos\phi \\ y &= y_0 + r \sin\phi. \end{aligned} \tag{104}$$



Kuva 24. Näkyyvyskertoimen laskeminen sylinterin pinnalla olevan kaarialkion AB ja vaipan pinnalla olevan tasoalkion CD väliillä.

Tarkastellaan ensin alkioiden keskipisteiden välistä näkymistä. Tätä varten määritetään vektori \vec{r} polttoainesauvan keskipisteestä ympyräalkion keskipisteeseen ja siitä vektori \vec{s} tasoalkion keskipisteeseen

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (x_1 - x_0) \vec{i} + (y_1 - y_0) \vec{j} \\ \vec{s} &= (x_2 - x_0) \vec{i} + (y_2 - y_0) \vec{j} .\end{aligned}\quad (105)$$

Kulma ϕ_1 saadaan vektoreiden pistetulon avulla:

$$\cos\phi_1 = \vec{r}^0 \cdot \vec{s}^0 .\quad (106)$$

Jos $\cos\phi < 0$, $|\phi| \geq \pi/2$ ja sylinterin kehällä oleva piste on takapinnalla näkymättömissä. Jos keskipisteet näkevät toisensa, laskentaa jatketaan seuraavasti. Kaarialkion AB päätepisteiden välisen kulmaeron puolikkaasta käytetään merkintää $\Delta\phi$. Kaarialkion AB päätepisteen A koordinaatit ovat

$$\begin{aligned}x_A &= x_0 + r(\cos\phi \cos\Delta\phi - \sin\phi \sin\Delta\phi) = x_0 + (x_1 - x_0) \cos\Delta\phi - (y_1 - y_0) \sin\Delta\phi \\ y_A &= y_0 + r(\sin\phi \cos\Delta\phi + \cos\phi \sin\Delta\phi) = y_0 + (y_1 - y_0) \cos\Delta\phi + (x_1 - x_0) \sin\Delta\phi .\end{aligned}\quad (107)$$

Vastaavasti pisteen B koordinaatit ovat

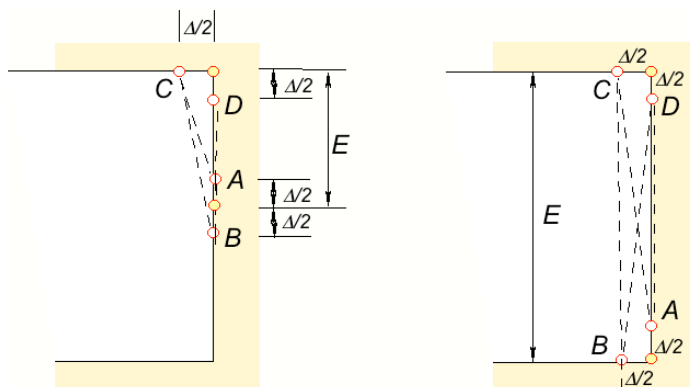
$$\begin{aligned}x_B &= x_0 + r(\cos\phi \cos\Delta\phi + \sin\phi \sin\Delta\phi) = x_0 + (x_1 - x_0) \cos\Delta\phi + (y_1 - y_0) \sin\Delta\phi \\ y_B &= y_0 + r(\sin\phi \cos\Delta\phi - \cos\phi \sin\Delta\phi) = y_0 + (y_1 - y_0) \cos\Delta\phi - (x_1 - x_0) \sin\Delta\phi .\end{aligned}\quad (108)$$

Suorasivuisen vaipan pinnalla olevien pisteiden C ja D koordinaatit on edellistä helpompi laskea. Tosin mutkikkuutta aiheutuu vaipan neljästä eri asennosta riippuen sauvan sijainnista. Pisteistä C ja D toinen voi olla myös nurkassa. Näkyvyyskerroin lasketaan crossed strings -menetelmällä.

2.5.3 Kahden tasoalkion välinen näkyvyyskerroin

Polttoaine-elementin neliömäisen kotelon reunoilla on kyse tasoalkioiden välistä näkyvyyskerroimista. Ensin tarkistetaan, ettei mikään polttoainesauva varjosta alkioiden välistä näkymistä. Jos alkiot ovat kokonaisuudessaan sivuilla (ei nurkissa), laskenta on yksinkertaista crossed strings -menetelmällä. Tietokoneohjelmaan tulee mutkikkuutta siitä, että tasot voivat olla neljässä eri asennossa. Lisäksi hieman lisätarkasteluja tarvitaan, jos alkio on vaipan nurkassa.

On korostettava, että lämpötila ei yleisesti ole vakio ja siksi pinnat joudutaan jakamaan niin tiheästi laskenta-alkioihin, että yksittäisen alkion alueella lämpötila on riittävällä tarkkuudella vakio.



Kuva 25. Säteily tasoalkioiden välillä silloin, kun alkion tai molempien alkioiden keskipiste on vaipan nurkassa.

Jos vain toinen alkio on nurkassa (kuvan 25 vasemmanpuoleinen tapaus), näkyvyyskerroimen laskukaava on

$$F = \frac{\sqrt{(E - \frac{\Delta}{2})^2 + (\frac{\Delta}{2})^2} + E - (\sqrt{(E + \frac{\Delta}{2})^2 + (\frac{\Delta}{2})^2} + E - \Delta)}{2\Delta}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{E}{\Delta}\right)^2 - \frac{E}{\Delta} + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{E}{\Delta}\right)^2 + \frac{E}{\Delta} + \frac{1}{2}}, \quad (109)$$

missä Δ on puolet hilavälistä, joka laskentaverkon generoinnissa tulee vakioksi, koska vaippalevy on neliön muotoinen. Jos molemmat alkioit ovat nurkissa (kuvan 25 oikeanpuoleinen tapaus), näkyvyyskerroimen laskukaava on

$$F = \frac{2 \sqrt{\left(E - \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} - (E + E - \Delta)}{2\Delta} = \sqrt{\left(\frac{E}{\Delta}\right)^2 - \frac{E}{\Delta} + \frac{1}{2}} - \frac{E}{\Delta} + \frac{1}{2}. \quad (110)$$

Koveran kulman näkyvyyskerroin itsensä suhteen on myös otettava huomioon ja se lasketaan kaavasta (32).

Tietokoneohjelmassa on syytä tarkistaa, että summaussääntö ja resiprookkilause toteutuvat. Jos näkyvyyskerroimia on laskettu likiaavoista, summaussehto ei toteudu. Pienet virheellisydet kannattaa skaalata siten, että summaussääntö (26) toteutuu skaalaamalla näkyvyyskerroimien summa ykkösen suuruiseksi. Tämä on tärkeää, sillä melko pienetkin virheellisydet voivat aiheuttaa lämpövuotoa absoluuttiseen nollapisteeseen, jolloin tuloksiin voi tulla merkittävä virhe.

Näkyvyyskerroimien laskenta on tapauskohtaista varjostusmahdollisuuksiin, ja näkyvyyskerroimien laskennasta tulee helposti muutaman sivun mittainen aliohjelma tietokoneohjelmaan.

3. Säteilylämmönsiirto ydinpolttoaine-elementin sisällä

Sovellusesimerkkeinä säteilylämmönsiirron numeerisesta laskennasta määritetään ensimmäisenä tapauksena lämpötilat ydinpolttoaineen loppusijoituskapselin sisällä olevassa polttoaineessa. Toisena tapauksena määritetään lämpötilat polttoaine-elementin sisällä eri lämpötiloissa ja määritetään poikittaissuuntainen efektiivinen lämmönjohtumiskerroin lämpötilan funktiona huoneen lämpötilasta korkeisiin lämpötiloihin.

3.1 Säteilylämmönsiirto loppusijoituskapselissa

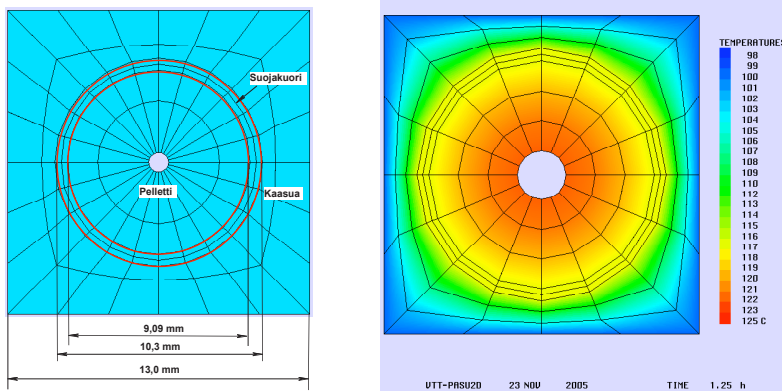
Ydinpolttoaineen loppusijoituksen turvallisuusarvioiden kannalta on tärkeitä tuntea riittävän tarkasti kapselin sisälle sijoitetun polttoaineen maksimilämpötila. Aihepiiriä on käsitelty yksityiskohtaisesti lähteessä (Ikonen 2006). Julkaisussa esitettiin ydinpolttoaineen loppusijoituskapselin sisustan lämpenemisanalyysin tuloksia, kun mallinnus tehtiin hyvin yksityiskohtaisesti.

Polttoaineen tuottaman jälkilämmön olennainen lämmönsiirtomekanismi on lämpösäteily sauvojen välillä ja johtuminen kapselin metalliosia pitkin kapselin ulkopinnalle. Loppusijoitussuunnittelun spesifikaatioissa kapselin ulkopinnan maksimilämpötila on rajoitettu arvoon +100 °C, jota käytetään ulkopinnan lämpötilana. Varioitiin useita alkuarvoja niiden vaikutuksen saamiseksi selville maksimilämpötiloihin. Kuparista tehdyn ulkovaipan ja valuraudan välisessä raossa säteilyllä ja erityisesti emissiviteetillä on suurin vaikutus sisäalueiden lämpötiloihin. Muut merkittävät parametrit ovat polttoainesauvojen välissä olevan kaasun lämmönjohtumiskerroin, kuparisen ulkopinnan lämpötila ja kapselin lämpöteho. Sen sijaan metallien lämmönjohtumiskertoimien vaihteluilla on merkityksetön vaikutus maksimilämpötilaan.

Taulukko 1 esittää tyypillisiä ydinpolttoaineen ominaisuuksia.

Taulukko 1. Materiaalien lämmönjohtavuuksia.

Pelletin (UO_2) lämmönjohtavuus (30 °C)	9,0	W/m/K
Pelletin lämmönjohtavuus (230 °C)	6,5	W/m/K
Pelletin lämmönjohtavuus (330 °C)	5,5	W/m/K
Ilman lämmönjohtavuus (Fletcher 1991)	0,03	W/m/K
Argonin lämmönjohtavuus	0,01772	W/m/K
Heliumin lämmönjohtavuus	0,152	W/m/K
Zirconiumin lämmönjohtavuus	17	W/m/K
Zirconiumoksidin lämmönjohtavuus	2	W/m/K
Teräksen lämmönjohtavuus	57,5	W/m/K
Valuraudan lämmönjohtavuus	35,5	W/m/K
Kuparin (puhdas) lämmönjohtavuus	390	W/m/K



Kuva 26. Yhden polttoainesauvan ja sitä ympäröivän kaasualueen jakaminen laskentaverkkoon.

Verkon generoinnin lähtökohta on yksittäinen polttoainesauva ja ympäröivä kaasualue, jotka jaetaan 2D-kontrollitilavuuksiin kuvassa 26 esitetyllä tavalla. Lämpösäteilyn takia sylinteripinta jaetaan riittävän moneen osaan kehän suunnassa. Säteen ja kehän suuntaisen jaon tiehyttä tutkittu liitteessä A. Radiaalisuunnassa pelletti jaetaan kolmeen osaan, zirkonium-suojakuori kolmeen osaan ja kaasualue kolmeen osaan. Pellettimateriaalin (UO_2), zirkonium-suojakuoren ja ympäröivän kaasun erilainen lämmönjohtavuus otetaan huomioon. Pellettimateriaalin lämmönjohtavuus riippuu nyt muista materiaaleja enemmän lämpötilasta, ja tämä riip-

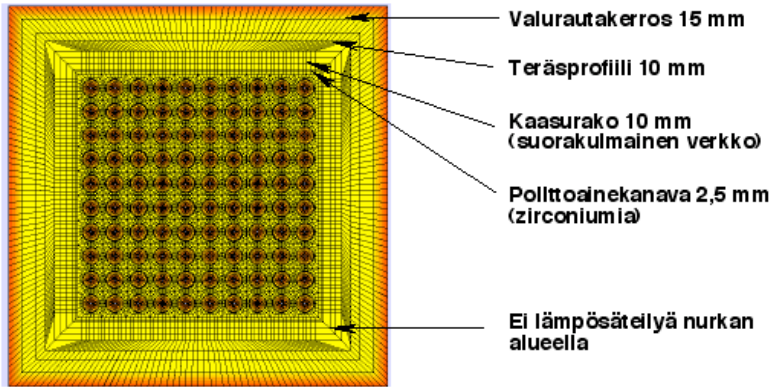
puvuus otetaan huomioon. Pelletin ja suojakuoren välille oletetaan välitön kosketus, sillä käytetty polttoaine on turvonnut voimakkaasti ja sulkenut pelletin ja suojakuoren välisen raon.

Taulukko 2. Lähtötiedot lämmönjohtumisanalyysiä varten.

Kapselin jälkilämpöteho
Kapselin ulkopinnan lämpötila
Polttoainesauvan aktiivisen osan pituus
Kapselin ulkosäde
Polttoainesauvan ulkohalkaisija
Zirkoniumsauvan oksidipinnoitteen paksuus
Oksidikerroksen paksuus
Pinnoitteen oksidikerroksen paksuus
Pelletin ja suojakuoren välinen rako
Polttoainesauvojen välinen etäisyys
Virtauskanavan leveys ulkopuolelta mitattuna
Virtauskanavan seinämän paksuus
Teräsputken ulkopuolinen leveys
Teräsputken seinämän paksuus
Valurautaligamentin seinämän puolipaksuus
Virtauskanavan ja teräsputken välinen rako
Valurautaosan ulkohalkaisija
Kuparivaipan paksuus
Kuparivaipan ja valuraudan välinen rako

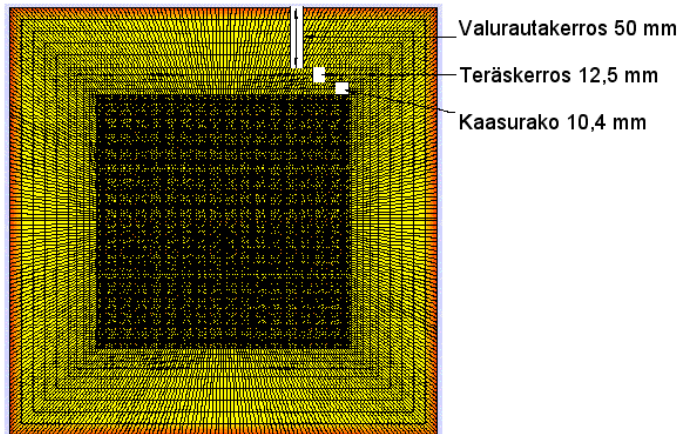
Tarkasteltaessa yksittäisen polttoainepelletin ja suojakuoren lämmönjohtumista suojakuoren vaikutus voitaisiin jättää huomioonottamatta, koska ohuen suojakuoren lämmönjohtavuus on suuri verrattuna pelletin lämmönjohtavuuteen. Todellisessa tilanteessa, jossa esiintyy myös kehän suuntaisista lämpötilaeroista aiheutuvaa lämmönjohtumista, zirkonium-suojakuoren kehän suuntaista lämmönsiirtoa ei voida jättää huomioonottamatta.

3. Säteilylämmönsiirto ydinpolttoaine-elementin sisällä



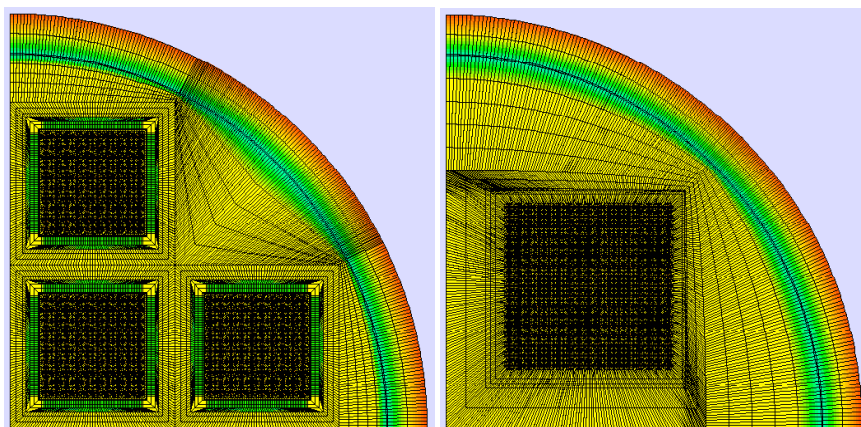
Kuva 27. Virtauskanava, kaasurako, neliömäinen teräsputki ja valurautakerros 10x10 sauvaa sisältävän BWR-elementin ympärillä.

Kuva 27 esittää laskentaverkkoa virtauskanavan, kaasuraon, neliömäinen teräsputken ja valurautakerroksen 10x10 sauvaa sisältävän BWR-elementtiin liittyen. Kuva 28 esittää EPR-elementtiin liittyvää laskentaverkkoa.



Kuva 28. Teräsputki ja valurautakerros 17x17 sauvaa sisältävän EPR-elementin ympärillä. Kaasurako 10,4 mm.

Kuva 29 esittää BWR-kapselin ja EPR-kapselin neljänneksen laskentamallia.



(a)

(b)

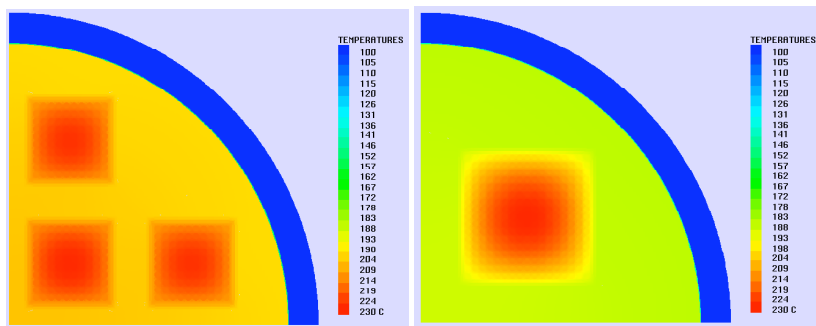
Kuva 29. Esimerkki BWR-kapselin (a, noin 54 400 kontrollitilavuutta) ja EPR-kapselin (b, noin 53 000 kontrollitilavuutta) neljänneksen mallista, joissa on mukana kaikkien polttoainesauvojen ja polttoaine-elementtien ulkokuorien välinen säteilylämmönsiirto (Ikonen 2006). Kuva esittää reunaehtoja.

Taulukko 3 esittää analyyseissä käytetyt pintojen emissiviteettien arvot.

Taulukko 3. BWR- ja EPR-kapseleiden analyyseissä käytetyt pintojen emissiviteettien arvot.

Polttoainesauvojen pintojen emissiviteetti (crud)	0,6
Virtauskanavan pintojen emissiviteetti (crud)	0,6
Teräspintojen emissiviteetti (red rusty)	0,6
Valurautapintojen emissiviteetti	0,6
Koneistetun kuparipinnan emissiviteetti	0,06–0,11

Kuva 30 esittää BWR-kapselin ja EPR-kapselin neljänneksen lämpötilajakaumia.

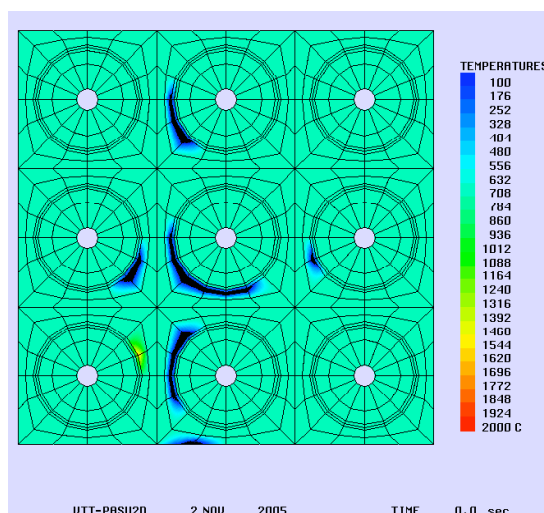


(a)

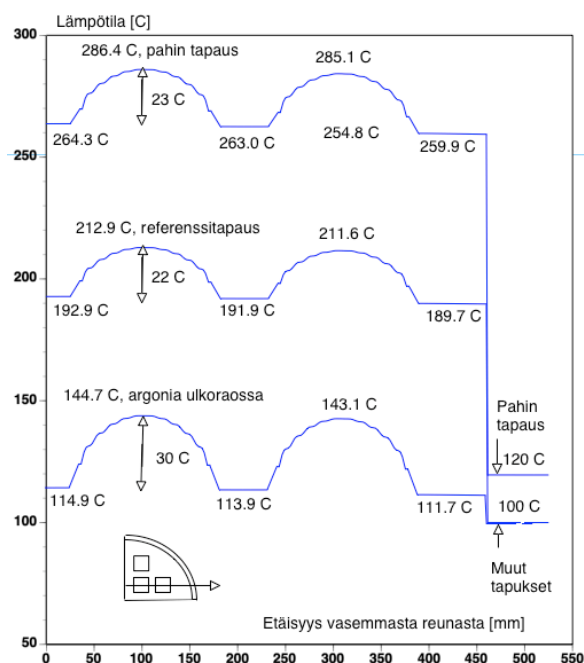
(b)

Kuva 30. Yksityiskohtaisella analyysillä määritetty lämpötilajakauma kuparipinnan emissiviteetillä 0,5 (a) referenssitapauksen alkuarvoilla sillä erolla, että teho korotettu arvoon 1,2 x 1 700 W ja lämpötilajakauma EPR-kapselin teholla (b).

Näkyvyyskertoimet määritetään ensin yhdelle elementille. Muille identtisille elementeille määrittäminen tapahtuu kopioimalla, mikä on melko monimutkainen operaatio. Laskennassa on kyse stationaaritilan iteroinnista. Kuva 31 havainnollistaa näkyvyyskertoimien määrittäystä. Kuva 32 esittää lämpötilajakaumia kuvassa 30a esitetyn kahden alimman BWR-polttoaine-elementin keskipisteiden kautta kulkevalla vaakasuoralla.



Kuva 31. Esimerkki näkyvyyskertoimien visualisoinnista. Vasemmassa alanurkassa olevan sauvan pinnalla olevan keltaisen pisteen näkyminen tummansinisiin pisteisiin.

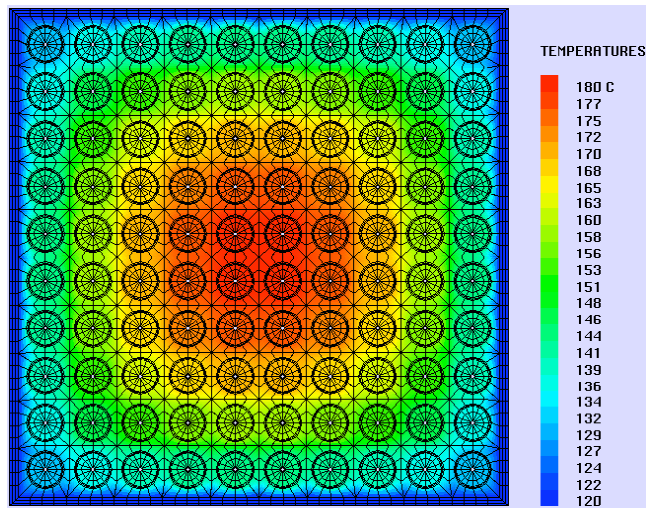


Kuva 32. Lämpötilajakaumia horisontaalisella viivalla, joka kulkee kahden BWR-polttoaine-elementin keskipisteiden kautta kolmessa eri tapauksessa.

3.2 Säteilylämmönsiirto polttoaine-elementissä eri lämpötiloissa

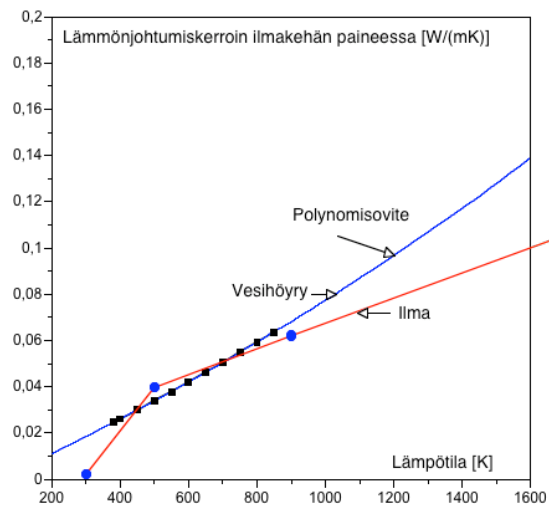
Tutkitaan säteilylämmönsiirtoa poikittaissuunnassa polttoaine-elementin sisällä eri lämpötiloissa. Polttoainesauvat ovat kaasun (ei veden) ympäröimiä tai tyhjiössä. Tarkastelut tapahtuvat kaksikulotteisella mallilla polttoaine-elementin poikkileikkaustasossa (kuva 33). Pituussuuntaista lämmönjohtumista ja kaasun virtauksia sauvojen välissä ei oteta huomioon. Tällainen maksimilämpötilojen määrityksen kannalta konservatiivinen tilanne syntyy esimerkiksi suljetun kapselin sisällä tai käytetyn polttoaineen vesiallasvarastossa, jossa pystyvirtaukset estyvät vedessä osittain olevassa polttoaine-elementissä. Päätaavoite tässä on määrittää poikittaissuuntainen efektiivinen lämmönjohtumiskerroin, jota käyttämällä voidaan laskea lämpötiloja polttoaine-elementin sisällä lämmönjohtumisanalyysinä säteilylämmönsiirto huomioon ottaen silloin, kun sauvojen välissä oleva kaasu pysyy paikallaan.

3. Säteilylämmönsiirto ydinpolttoaine-elementin sisällä



Kuva 33. Esimerkki yksityiskohtaisella analyysillä määritetystä lämpötilajakau-
masta polttoaine-elementin sisällä, kun reunojen lämpötila on 120 °C ja kaikkien
säteilypintojen emissiviteetti on $\varepsilon = 0,3$.

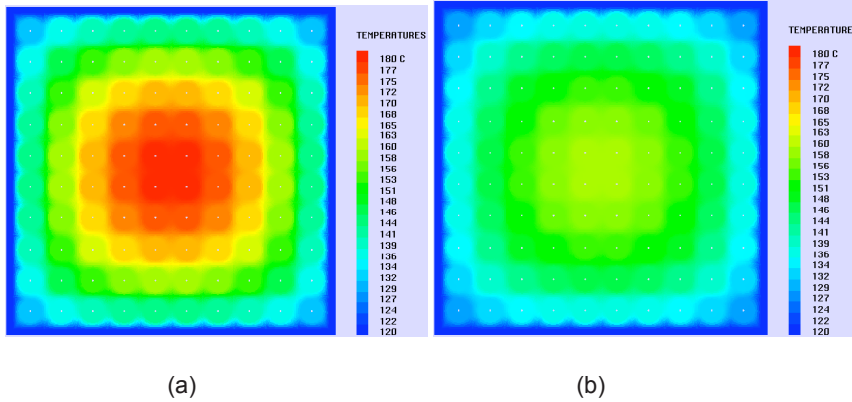
Polttoaine-elementin poikkileikkaustiedot on esitetty aiemmin taulukoissa 1 ja 2.
Kuvassa 34 on ilman ja vesihöyryn lämmönjohtavuus eri lämpötiloissa.



Kuva 34. Vesihöyryn (Incropera & deWitt 2002) ja ilman (Fletcher 1991) lämmön-
johtavuus ilmakehän paineessa.

3. Säteilylämmönsiirto ydinpolttoaine-elementin sisällä

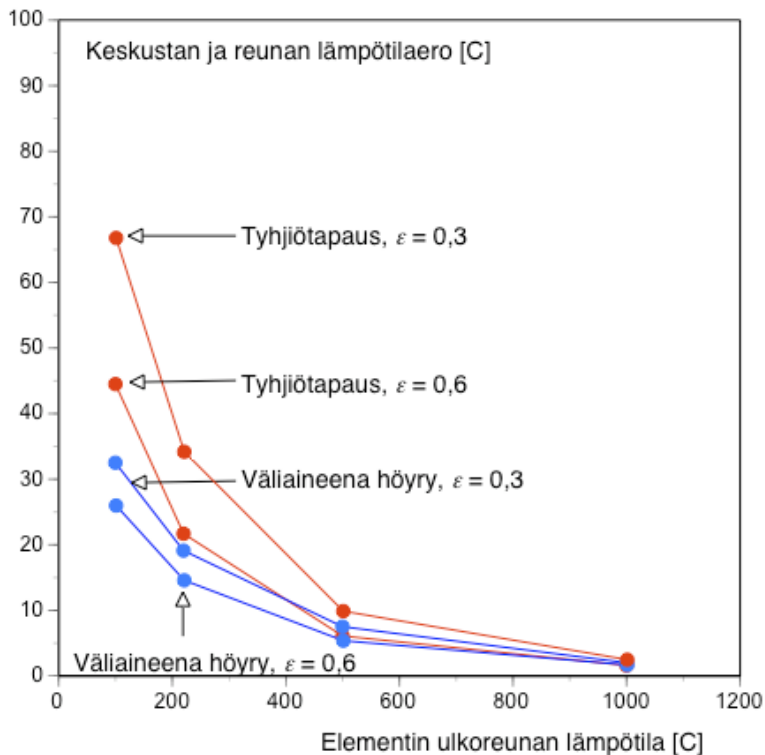
Valitaan polttoaine-elementin tehoksi 200 W, joka vastaa pitkään jäähtyneen elementin tehoa. Elementissä aktiivisen osan pituus on 3,68 m. Jos sauvoja elementissä on 100, tehotiheys polttoainepelletissä on $200 \text{ W} / [3,68 \text{ m} \cdot 100 \cdot \pi \cdot (0,00909/2 \text{ m})^2] = 8\,374,6 \text{ W/m}^3$.



Kuva 35. Yksityiskohtaisella säteilylämmönjohtumisanalyysillä määritetty lämpötilajakauma polttoaine-elementin (BWR-elementti) sisällä tyhjiötapauksessa, kun säteilypintojen emissiviteetti on $\varepsilon = 0,3$ (a) tai $\varepsilon = 0,6$ (b).

Asetetaan polttoaine-elementin 2,3 mm paksun zirkonium-kanavaputken ulkopinnalle vakio­lämpötila ja haetaan stationaaritila, jolloin saadaan esimerkiksi kuvassa 35 esitettyjä lämpötilajakaumia, kun ulkoreunan lämpötila on 120 °C.

Varioimalla ulkoreunan lämpötilaa saadaan keskustan ja ulkoreunan lämpötilaeroa esitettäviä käyriä kuvassa 36. Polttoainesauvan zirkonium-pinnan emissiviteettiä on myös varioitu ja laskenta on tehty tyhjiötapauksessa tai tilanteessa, jossa väliaineena on vesihöyry. Alhaisissa lämpötiloissa lämpötilaerot ovat suurimmillaan ja parametrien vaikutus herkimmillään. Korkeissa lämpötiloissa säteilylämmönsiirto tasaa lämpötilaerot ja 1 000 °C:ssa lämpötilaerot ovat vain noin 2 °C emissiviteetin arvosta ja väliaineesta riippumatta.

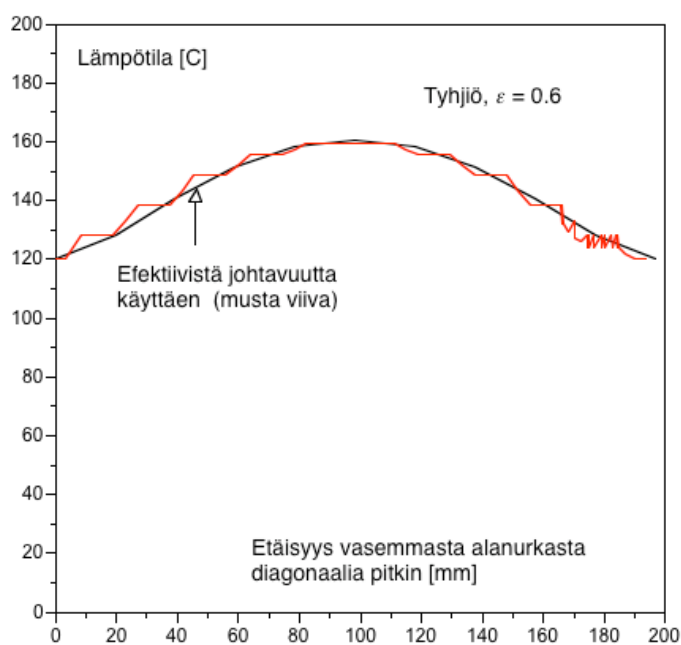


Kuva 36. Polttoaine-elementin (BWR-elementti) keskustan ja ulkoreunan lämpötilaero ulkoreunan lämpötilan funktiona, kun säteilypintojen emissiviteetti on $\epsilon = 0,3$ tai $\epsilon = 0,6$ tyhjiötapauksessa tai tilanteessa, jossa väliaineena on vesihöyry.

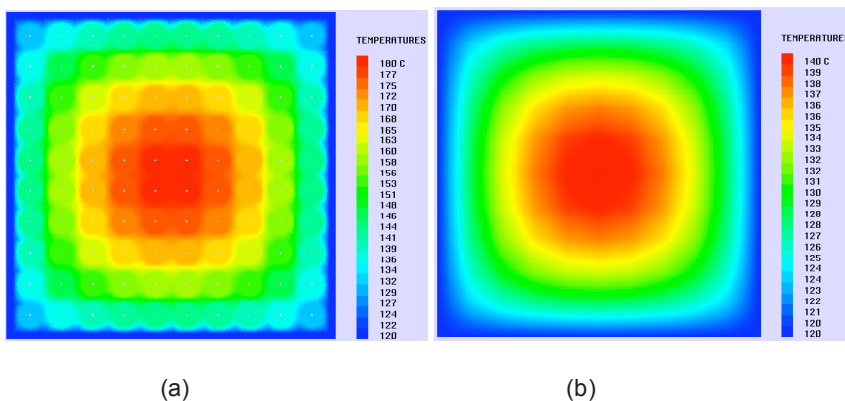
3.2.1 Efektiivisen lämmönjohtumiskertoimen määrittäminen

Määritetään efektiivinen lämmönjohtavuus poikittaissuunnassa eri lämpötiloissa. Laskenta-alue oletetaan homogeeniseksi aineeksi ja sen lämpötilat lasketaan tavanomaisena lämmönjohtumistehtävänä. Kokeilemalla haetaan sellainen lämmönjohtumiskerroin, että keskialueella lämpötilat saadaan yhtä suuriksi homogeenisella ja yksityiskohtaisella mallilla. Efektiivisen lämmönjohtavuuden määrittäminen aloitetaan korkeista lämpötiloista, koska lämpötilaerot ovat pienimmillään ja lämmönjohtavuudet alemmissä lämpötiloissa eivät vaikuta laskentaan. Kun mennään seuraavaan alempaan reunalämpötilaan, keskustan alueella lämpötilat ovat korkeampia ja lämmönjohtavuudet näissä lämpötiloissa on jo määritetty. Polttoaine-elementin teho on 200 W. Tehotiheydelle käytetään keskimääräistä arvoa $3\,097,5\text{ W/m}^3$.

Kuvat 37 ja 38 havainnollistavat lämpötilojen sovitusta.



Kuva 37. Polttoainepellettien (BWR-elementti) keskipisteiden kautta käyvää diagonaalia pitkin piirretty lämpötilajakauma tyhjiötapauksessa, kun säteilypintojen emissiviteetti on $\varepsilon = 0,6$. Lämpötila reunoilla 120 °C.



Kuva 38. Lämpötilajakauma tyhjiötapauksessa laskettuna yksityiskohtaisella mallilla (a) ja homogenisoidulla mallilla (b), kun säteilypintojen emissiviteetti on $\varepsilon = 0,6$. Reunoilla lämpötila on 120 °C.

3. Säteilylämmönsiirto ydinpolttoaine-elementin sisällä

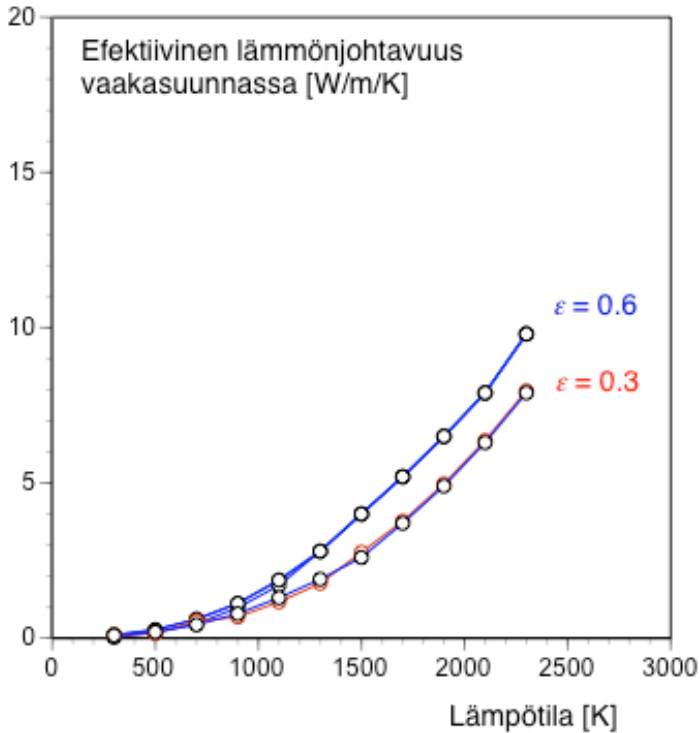
Taulukko 4 esittää ajojen tulokset ja kuvassa 39 esitetään tulokset käyrinä. Jos teho muuttuu, lämpötilat taulukossa 4 muuttuvat, mutta kuvassa 39 esitetyt efektiiviset lämmönjohtavuuskäyrät eivät muutu.

Taulukko 4. Lämpötila elementin keskellä ja efektiivinen lämmönjohtumiskerroin elementin ulkoreunan lämpötilan funktiona, kun polttoainesauvojen välissä on tyhjiö tai vesihöyryä ja polttoainesauvan pinnan emissiviteetti on 0,6 tai 0,3 ja elementin teho on 200 W.

Ulko- reunan lämpö- tila [K]	Tyhjiö				Väliaineena vesihöyry			
	Keskustan lämpötila [K]		λ_{eff} [W/m/K]		Keskustan lämpötila [K]		λ_{eff} [W/m/K]	
	$\varepsilon =$ 0,6	$\varepsilon =$ 0,3	$\varepsilon =$ 0,6	$\varepsilon =$ 0,3	$\varepsilon =$ 0,6	$\varepsilon =$ 0,3	$\varepsilon =$ 0,6	$\varepsilon =$ 0,3
300	371,8	401,7	0,030	0,022	333,9	339,6	0,101	0,088
500	520,9	532,8	0,17	0,088	514,0	518,5	0,27	0,20
700	708,1	712,9	0,47	0,48	706,4	708,9	0,61	0,43
900	904,0	906,3	0,98	0,62	903,4	904,9	1,12	0,79
1100	1102,3	1103,5	1,7	1,1	1102,0	1103,0	1,87	1,3
1300	1301,5	1302,2	2,8	1,7	1301,4	1302,0	2,8	1,9
1500	1501,0	1501,5	4,0	2,7	1501,0	1501,4	4,0	2,6
1700	1700,8	1701,0	5,2	3,7	1700,8	1701,0	5,2	3,7
1900	1900,6	1900,8	6,5	4,9	1900,6	1900,8	6,5	4,9
2100	2100,5	2100,6	7,9	6,3	2100,5	2100,6	7,9	6,3
2300	2300,1	2300,5	9,9	7,9	2300,4	2300,5	9,8	7,9

Lämpötilaerot polttoaine-elementin keskustan ja reunan välillä suurenevat, kun elementti on tyhjiössä ilman höyryn lämpöä johtavaa vaikutusta. Lämpötilassa 100 °C lämpötilaero on 44,5 °C ja 66,6 °C polttoainesauvan pinnan emissiviteetin arvoilla 0,6 ja 0,3. Vesihöyry pienentää nämä lämpötilat arvoihin 25,4 °C ja 32,6 °C.

Kuva 39 esittää efektiivistä lämmönjohtavuutta poikittaissuunnassa pintojen emissiviteeteillä $\varepsilon = 0,6$ ja $\varepsilon = 0,3$ tyhjiötapauksessa. Vesihöyry väliaineena parantaa lämmönjohtavuutta vain hieman alhaisissa lämpötiloissa.



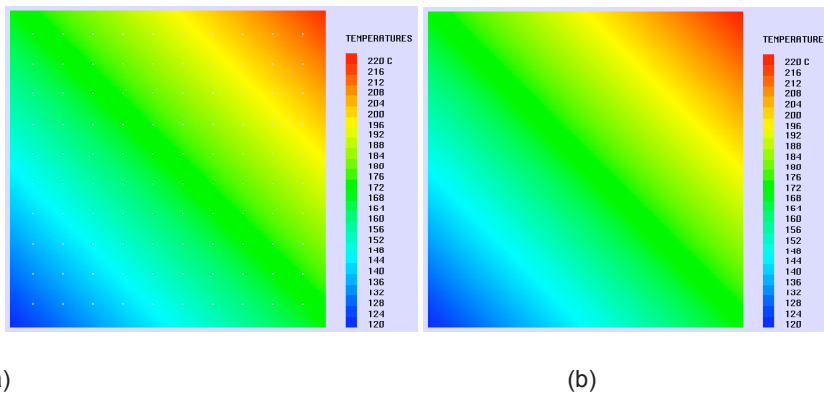
Kuva 39. Efektiivinen lämmönjohtavuus poikittaissuunnassa pintojen emissiviteeteillä $\epsilon = 0,6$ ja $\epsilon = 0,3$ tyhjiötapauksessa.

3.2.2 Täydentäviä testiajoja

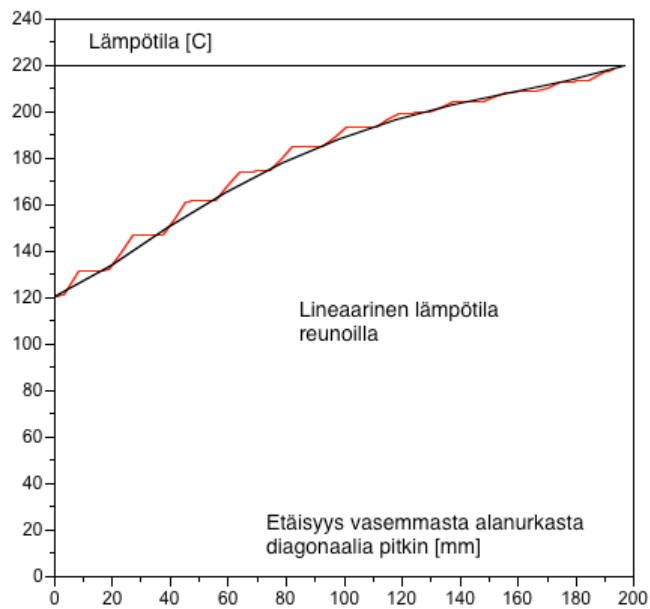
Edellä asetettiin lämpötila vakioksi polttoaine-elementin reunalla. Seuraavassa testataan, miten hyvin efektiivinen lämmönjohtavuus toimii, kun lämpötilajakauma reunoilla ja siten myös sisällä on toisenlainen.

Kuva 40 esittää lämpötilajakaumaa tyhjiötapauksessa laskettuna yksityiskohtaisella mallilla (a) ja homogenisoidulla mallilla (b), kun säteilypintojen emissiviteetti on $\epsilon = 0,6$. Reunoilla lämpötila kasvaa lineaarisesti arvosta $120\text{ }^{\circ}\text{C}$ arvoon $220\text{ }^{\circ}\text{C}$ alhaalta vasemmalta ylös oikealle. Kuva 41 esittää polttoainepellettien keskipisteiden kautta käyvää diagonaalia pitkin piirretyt lämpötilajakaumat. Kuvat 42 ja 43 esittävät vastaavat tulokset, kun lämpötila reunoilla kasvaa lineaarisesti arvosta $700\text{ }^{\circ}\text{C}$ arvoon $800\text{ }^{\circ}\text{C}$. Yksittäisen sauvan alueella lämpötila on kohtalaisen tarkasti vakio (zirkoniumin lämmönjohtavuus 17 W/m/K on hyvä).

3. Säteilylämmönsiirto ydinpolttoaine-elementin sisällä

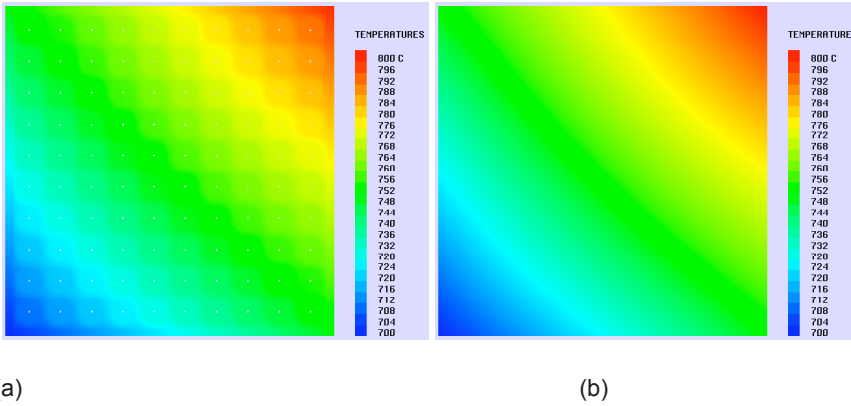


Kuva 40. Lämpötilajakauma tyhjiötapauksessa laskettuna yksityiskohtaisella mallilla (a) ja homogenisoidulla mallilla (b), kun säteilypintojen emissiviteetti on $\varepsilon = 0,6$. Reunoilla lämpötila kasvaa lineaarisesti arvosta $120\text{ }^{\circ}\text{C}$ arvoon $220\text{ }^{\circ}\text{C}$ alhaalta vasemmalta ylös oikealle.

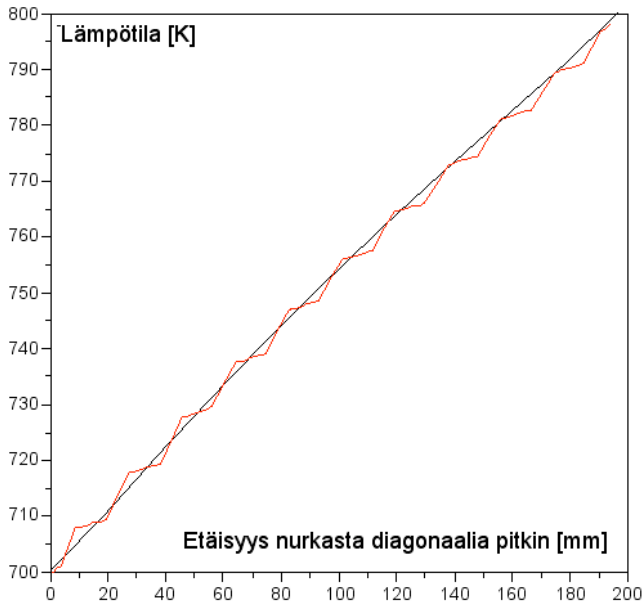


Kuva 41. Polttoainepellettien (BWR-elementti) keskipisteiden kautta käyvää diagonaalia pitkin piirretty lämpötilajakauma tyhjiötapauksessa, kun säteilypintojen emissiviteetti on $\varepsilon = 0,6$. Reunoilla lämpötila kasvaa lineaarisesti arvosta $120\text{ }^{\circ}\text{C}$ arvoon $220\text{ }^{\circ}\text{C}$ alhaalta vasemmalta ylös oikealle.

3. Säteilylämmönsiirto ydinpolttoaine-elementin sisällä



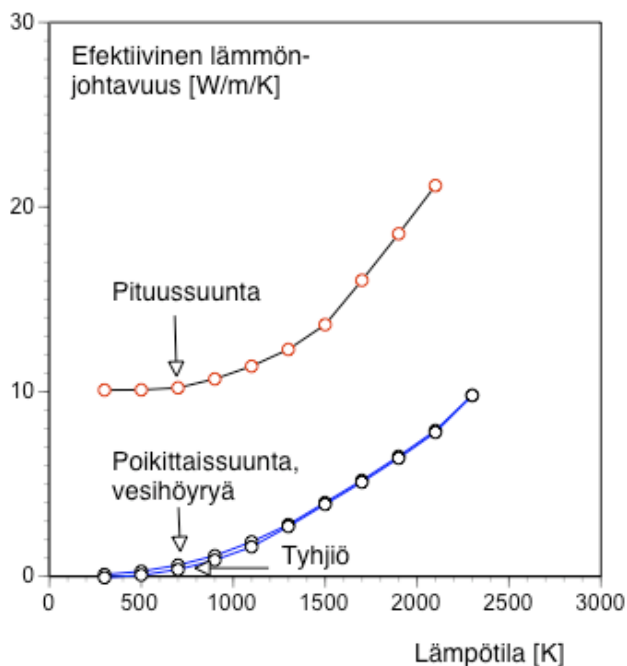
Kuva 42. Lämpötilajakauma tyhjiötapauksessa laskettuna yksityiskohtaisella mallilla (a) ja homogenisoidulla mallilla (b), kun säteilypintojen emissiviteetti on $\varepsilon = 0,6$. Reunoilla lämpötila kasvaa lineaarisesti arvosta 700°C arvoon 800°C alhaalta vasemmalta ylös oikealle.



Kuva 43. Polttoainepellettien (BWR-elementti) keskipisteiden kautta käyvää diagonaalia pitkin piirretty lämpötilajakauma tyhjiötapauksessa, kun säteilypintojen emissiviteetti on $\varepsilon = 0,6$. Reunoilla lämpötila kasvaa lineaarisesti arvosta 700°C arvoon 800°C alhaalta vasemmalta ylös oikealle.

Tarkastelut osoittavat, että efektiivinen lämmönjohtavuus kuvaa varsin tarkasti lämpötiloja polttoaine-elementin sisällä. Efektiivistä lämmönjohtavuutta käyttämällä lämpötilakenttiä voidaan määrittää hyvin paljon tehokkaammin kuin yksityiskohtaisella säteilylämmönsiirtoanalyysillä. Näin voidaan laskea suuri määrä tyhjiössä tai kaasussa olevia polttoaine-elementtejä. Efektiivistä lämmönjohtavuutta voidaan soveltaa myös kolmiulotteisiin tapauksiin, joissa esiintyy ortotrooppinen lämmönjohtavuus siten, että alhaisissa lämpötiloissa polttoaine-elementin pituussuunnassa lämmönjohtavuus on parempi kuin poikittaissuunnassa. Korostettakoon lopuksi, että em. polttoainesauvojen välissä oleva kaasu on paikallaan. Tällainen tilanne syntyy käytetyn ydinpolttoaineen suljetussa kapselissa. Jos kaasu virtaa ja lämpö siirtyy kuljettumalla (konvektiolla) tarkastelut eivät enää päde.

Kuvassa 44 alimmat toisiaan lähellä olevat käyrät esittävät efektiivistä lämmönjohtavuutta elementin poikittaissuunnassa. Vesihöyryn ollessa väliaineena lämmönjohtavuus paranee hieman alhaisissa lämpötiloissa. Korkeissa lämpötiloissa säteilylämmönsiirto on hallitseva.



Kuva 44. Efektiivinen lämmönjohtavuus polttoaine-elementin pitkittäis- ja poikittaissuunnassa.

Yhteenveto

Lämpösäteilyn laskentaa monimutkaisissa geometrioissa alettiin kehittää vuonna 2006 arvioitaessa polttoaineen lämpötiloja käytetyn polttoaineen loppusijoituskapselin sisällä. Sisustan lämpenemistä tutkittiin mallintamalla BWR-, EPR- ja VVER 440 -ydinpolttoaineen loppusijoituskapselin poikkileikkaus yksityiskohtaisesti. Polttoaineen tuottaman jälkilämmön olennainen lämmönsiirtomekanismi on lämpösäteily sauvojen välillä ja johtuminen kapselin metalliosia pitkin kapselin ulkopinnalle. Myöhemmin säteilylämmönsiirron laskenta on tullut esille myös käytetyn ydinpolttoaineen vesiallasvaraston onnettomuusanalyysissä. Julkaisussa kuvataan edellä mainittujen töiden yhteydessä kehitettyjä säteilylämmönsiirron laskentamenetelmiä.

Julkaisu käsittelee säteilylämmönsiirron teoriaa, kuten näkyvyyskertoimien määrittämistä, näkyvyyskertoimia koskevia ehtoja, säteilyn emission, absorbtion ja heijastumisen samanaikaiseen käsittelyyn käytettyä radiositeettia sekä säteilylämmönsiirron kytkemistä lämmönjohtumisen laskentaan kontrollitiilavuusmenetelmällä. Julkaisussa on lukuisia esimerkkejä teorian selventämiseksi.

Korkeissa lämpötiloissa ja konvekseissa (koverissa) tapauksissa säteilylämmönsiirto tasaa merkittävästi pintojen välisiä lämpötilaeroja. Tämä aiheutuu säteilylämmönsiirtoa kuvaavan Stefanin–Boltzmannin yhtälön riippuvuudesta absoluuttisen lämpötilan neljännessä potenssista. Lämpötilan noustessa riittävän korkeaksi säteilylämmönsiirto tulee hallitsevaksi lämmönsiirtomekanismiksi lämmön johtumiseen ja kuljettumiseen verrattuna.

Lähdeluettelo

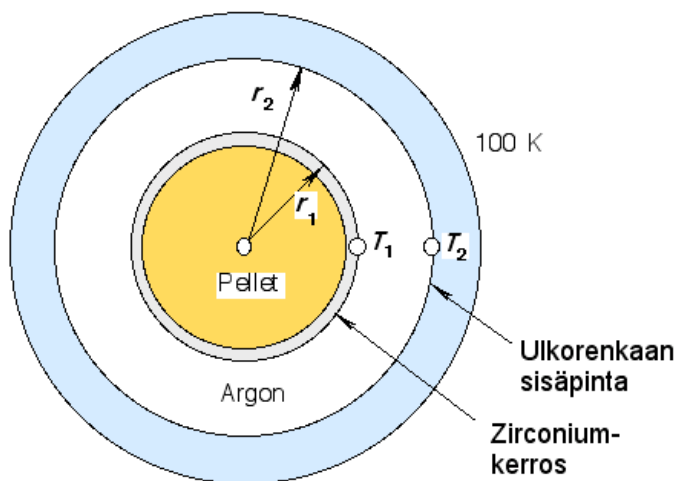
- Carlson, R.W., Thomas, G.R., Hovingh, J., 1999, Radiant Heat Transfer from Storage Casks to the Environment. American Society of Mechanical Engineering, Pressure Vessels and Piping Conference, Boston, MA, August 2-5. 10 s.
- Fletcher, C.A.J. 1991. Computational Techniques for Fluid Dynamics. Volume II. Second edition. Springer-Verlag. 493 s.
- Howell, J.R. 2012 A Catalog of Radiation Heat Transfer Configuration Factors. The University of Texas at Austin.
(<http://www.engr.uky.edu/rtl/Catalog/tablecon.html>)
- Ikonen, K. 2006, Fuel temperature in disposal canisters. Working Report POSIVA 2006-19. Posiva Oy, Olkiluoto. 47 s.
- Incropera, F.P. & DeWitt, D.P. 2002. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 5th edition. John Wiley & Sons. 981 s.
- Mills, A.E. 1999. Basic heat & mass transfer. 2nd edition, Prentice Hall, ISBN 0-13-096247-3.
- Paloposki, T. & Liedquist, L. 2005. Steel emissivity at high temperatures. Espoo. VTT Tiedotteita 2299. 81 s.

Liite A: Tietokoneohjelman verifiointia

Tässä liitteessä verifioidaan kaksiulotteisiin tapauksiin kehitettyä tietokoneohjelmaa sellaisissa tapauksissa, joiden eksakti analyttinen ratkaisu tunnetaan. Numeerisessa analyysissä mahdollisia epätarkkuutta aiheuttavia tekijöitä ovat mm. verkon tiheys ja aika-askeleen pituus. Tärkeä ratkaisun tarkistustapa on energiabalanssin laskeminen: systeemiin syötetyn energian ja reunapintojen lävitse ulos virtaavan energian erotuksen koko tarkasteluajalta tulee vastata koko tarkasteluajana tapahtuvaa systeemin entalpiian muutosta. Myös visualisointi koskien verkkoa, reunaehtoja ja tuloksia (lämpötilajakaumia) lisää laskennan luotettavuutta.

Verifiointitapaus 1

Tarkastellaan kuvassa A1 esitettyä pyörähdysymmetristä testitapausta ilman lämpösäteilyä. Polttoainepelletin (säde 5mm) ulkopinnalla on zirkonium-pinnoite seinämänpaksuudeltaan 0,65 mm suorassa koskeuksessa. Zirkonium-pinnoitetta ympäröi argonkaasikerros paksuudeltaan 5 mm. Kaasukerrosta ympäröi 2 mm paksu materiaalikerros, jonka lämmönjohtavuudeksi valitaan pieni arvo, jotta ulkokerrokseen saataisiin riittävän suuri lämpötilaero. Ulkopinnan lämpötilaksi asetetaan $T_{ulkopinta, e} = 100 \text{ K}$. Lämmönkehitys pelletin alueella on $\dot{\phi} = 100 \text{ kW/m}^3$.



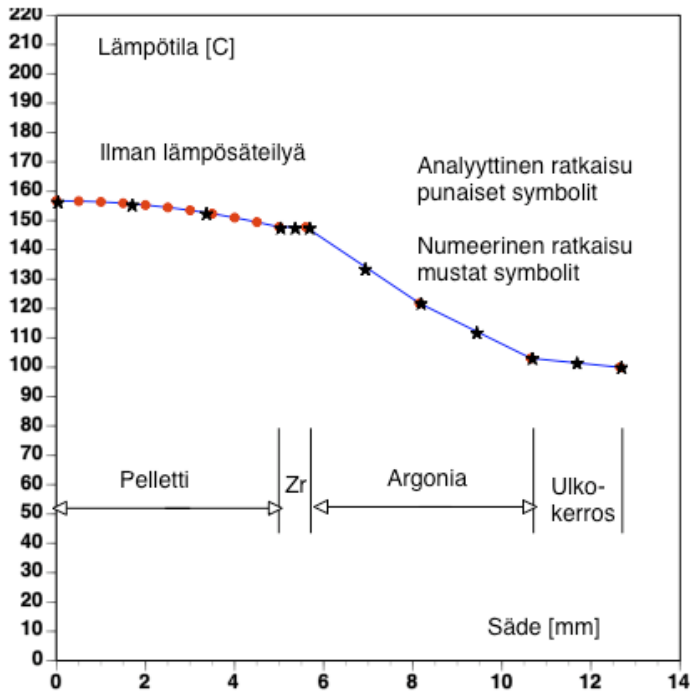
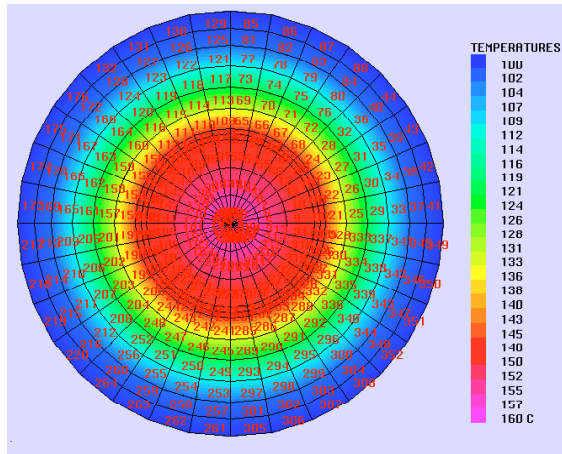
Kuva A1. Verifiointitapaus 1.

Analyttisen ratkaisun mukaan lämpötilajakaumat eri kerroksissa ovat logaritmisia:

$$\begin{aligned}
 T_{ulkokerros} &= T_{ulkokerrose} + \frac{r_{pellet}^2 \Phi}{2\lambda_{ulkokerros}} \ln \frac{r_{ulkokerrose}}{r} \\
 T_{argon} &= T_{ulkokerros,i} + \frac{r_{pellet}^2 \Phi}{2\lambda_{argon}} \ln \frac{r_{argon,e}}{r} \\
 T_{zirkonium} &= T_{argon,i} + \frac{r_{pellet}^2 \Phi}{2\lambda_{zirkonium}} \ln \frac{r_{zirkoniu,e}}{r} \\
 T_{pellet} &= T_{zirkonium,i} + \frac{\Phi}{4\lambda_{pellet}} (r_{pellet}^2 - r^2), \tag{A1}
 \end{aligned}$$

Sisäpintojen lämpötiloja merkitään alaindeksillä "i" ja ulkopinnan lämpötiloja alaindeksillä "e". Pelletin, zirkoniumin, argonin ja ulkokerrosmateriaalin lämmönjohtavuudet ovat $\lambda_{pellet} = 0,07$ W/m/K, $\lambda_{zirkonium} = 17$ W/m/K, $\lambda_{argon} = 0,01772$ W/m/K ja $\lambda_{ulkokerros} = 0,07$ W/m/K. Säteiksi oletetaan $r_{pellet, e} = 5$ mm, $r_{zirkoniu, e} = 5,65$ mm, $r_{argon, e} = 10,65$ mm ja $r_{ulkokerros, e} = 12,65$ mm.

Analyttisen ratkaisun mukaan keskipisteen lämpötila on 156,7 K. Numeerinen ratkaisu antaa maksimilämpötilaksi 156,0 K, joka on 0,4 % pienempi kuin analyttisen ratkaisun antama lämpötila. Kuva A2 esittää lämpötilajakaumia.



Kuva A2. Lämpötilajakaumia, kun lämpösäteilyn vaikutusta ei ole mukana.

Verifiointitapaus 2, yhdistetty lämmönjohtuminen ja säteily

Seuraavassa verifiointitapauksessa lisätään säteilylämmönsiirto kaasuraon sisä- ja ulkopinnan välille. Lyhyden vuoksi käytetään seuraavia merkintöjä

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{\text{zirkonium}, e} \\ T_2 &= T_{\text{ulkokerros}, i} \\ r_1 &= r_{\text{zirkonium}, e} \\ r_2 &= r_{\text{ulkokerros}, i} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

Analyttisessä ratkaisussa ensin ulkopinnan sisäpuolinen lämpötila lasketaan kaavasta

$$T_2 = T_{\text{ulkokerros}, e} + \frac{r_{\text{pellet}}^2 \Phi}{2\lambda_{\text{ulkokerros}}} \ln \frac{r_{\text{ulkokerros}, e}}{r_{\text{ulkokerros}, i}} \quad (\text{A3})$$

missä $T_{\text{ulkokerros}, e} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$. Kaava (A3) antaa lämpötilaksi $T_2 = T_{\text{kuvitteellinen materiaali}, i} = 103,1 \text{ }^\circ\text{C}$. Argon-kaasun läpäisevä lämpövuoto zirkoniumpinnalla on

$$\phi_{\text{argon}} = \frac{\lambda_{\text{argon}} (T_1 - T_2)}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{A4})$$

Oletetaan, että lämmönjohtuminen argonissa ja sen läpäisevä säteily eivät vaikuta toisiinsa. Zirkonium-pinnan läpäisevä säteilyn lämpövuoto on (esimerkki 10)

$$\phi = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 (r_2/r_1)}} \quad (\text{A5})$$

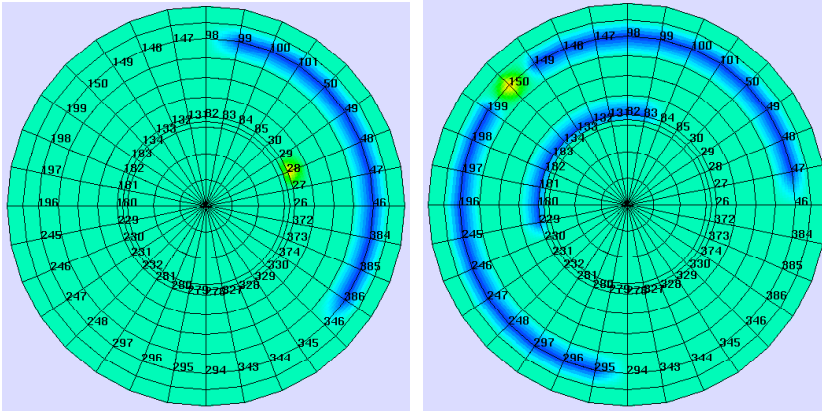
missä $\varepsilon_1 = 0,6$ ja $\varepsilon_2 = 0,8$ ovat zirkoniumpinnan ja ulkopinnan emissiviteettejä. Nyt $F_{12} = 1$. Zirkonium-pinnan läpäisevä kokonaislämpövuoto on

$$\frac{\lambda_{\text{argon}} (T_1 - T_2)}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 (r_2/r_1)}} = \frac{r_{\text{pellet}}^2 \Phi}{2r_1} \quad (\text{A6})$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 (r_2/r_1)}} \boxed{T_1^4} + \frac{\lambda_{\text{argon}}}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} \boxed{T_1} \\ - \frac{\sigma T_2^4}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 (r_2/r_1)}} - \frac{\lambda_{\text{argon}} T_2}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} - \frac{r_{\text{pellet}}^2 \Phi}{2r_1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

Numeerisessa ratkaisussa tutkitaan ensin verkon tiheyden vaikutusta samankeskisten sylintereiden näkyyvyskertoimien laskentatarkkuuteen. Muodostetaan kaa-rialkioiden väliset näkyyvyskertoimet. Kuva A3 havainnollistaa, kuinka kaasuraon sisä- tai ulkopinnalla oleva yksittäinen diskreetointipiste (keltaisella merkitty piste sisä- tai ulkosylinterin pinnalla) ”näkee” muut pisteet vastakkaisella säteilypinnalla.

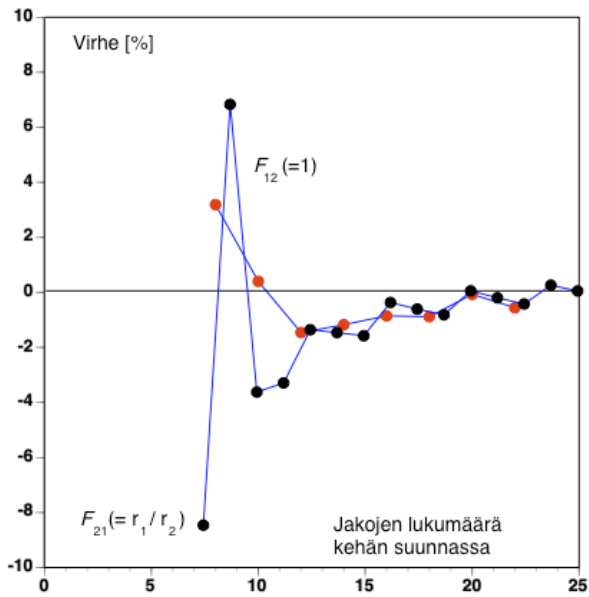


Kuva A3. Näkyyvyskertoimien havainnollistaminen.

Näkyyvyskertoimien analyttinen ratkaisu samankeskisille sylintereille on (ks. esimerkki 1)

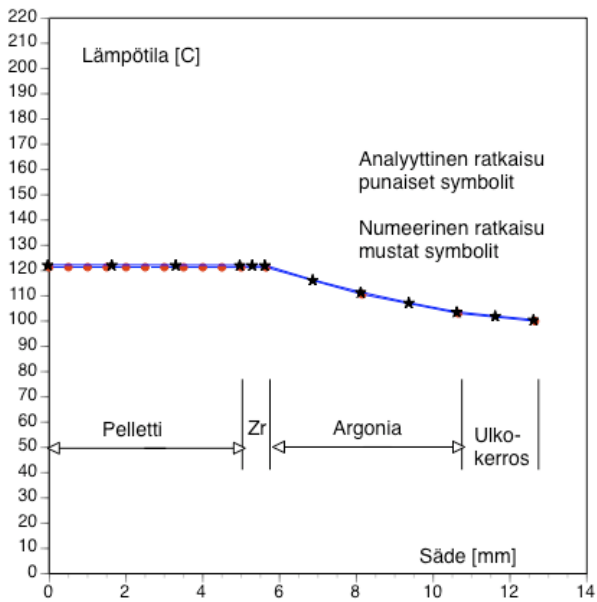
$$\begin{aligned}
 F_{11} &= 0 \\
 F_{12} &= 1 \\
 F_{21} &= \frac{r_1}{r_2} \\
 F_{22} &= 1 - F_{21} .
 \end{aligned}
 \tag{A8}$$

Alaindeksi ”1” viittaa sisäsylinteriin ja alaindeksi ”2” ulkosylinteriin. Numeerisessa analyysissä ainoastaan kehän suuntainen jako verkossa vaikuttaa näkyyvyskertoimien tarkkuuteen. Näkyyvyskertoimien F_{12} ja F_{21} virhe kehän suuntaisen verkon tiheyden funktiona on esitetty kuvassa A4.

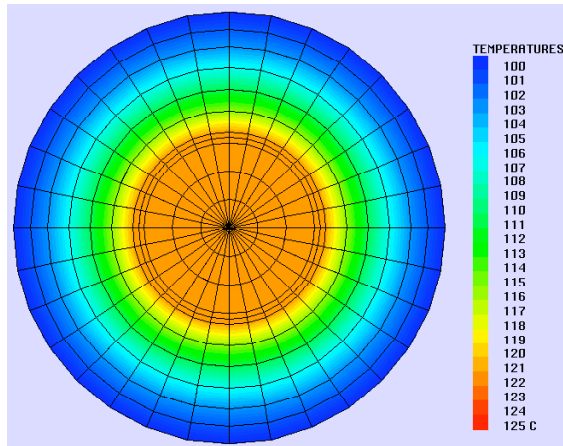


Kuva A4. Kehän suuntainen verkon tiheyden vaikutus näkyvyyskertoimien tarkkuuteen.

Kuva A5 esittää lämpötilaprofiileja. Kuva A6 havainnollistaa lämpötiloja.



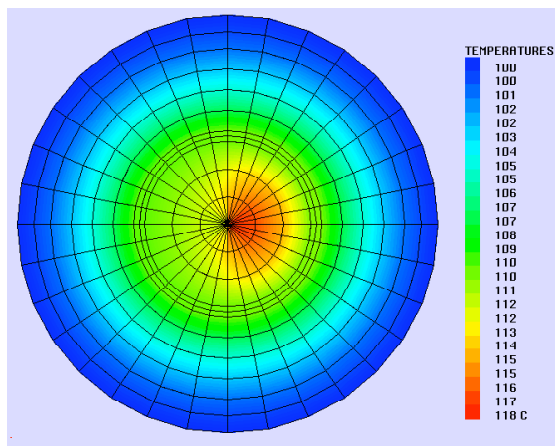
Kuva A5. Lämpötilaprofiileja, kun lämpösäteilyn vaikutus on mukana. $\lambda_{pellet} = 7$ W/m/K.



Kuva A6. Lämpötilajakauma, kun lämpösäteilyn vaikutus otetaan huomioon. Korkein lämpötila 121,7 °C.

Numeerinen maksimilämpötila on 0,4 % alempi kuin analyttinen maksimilämpötila (kuva A6). Pelletissä generoituva teho on 7,804 W/m ja ulkokehän läpäisevä integroitu teho on 7,923 W/m. Tehoero on siis 1,5 %.

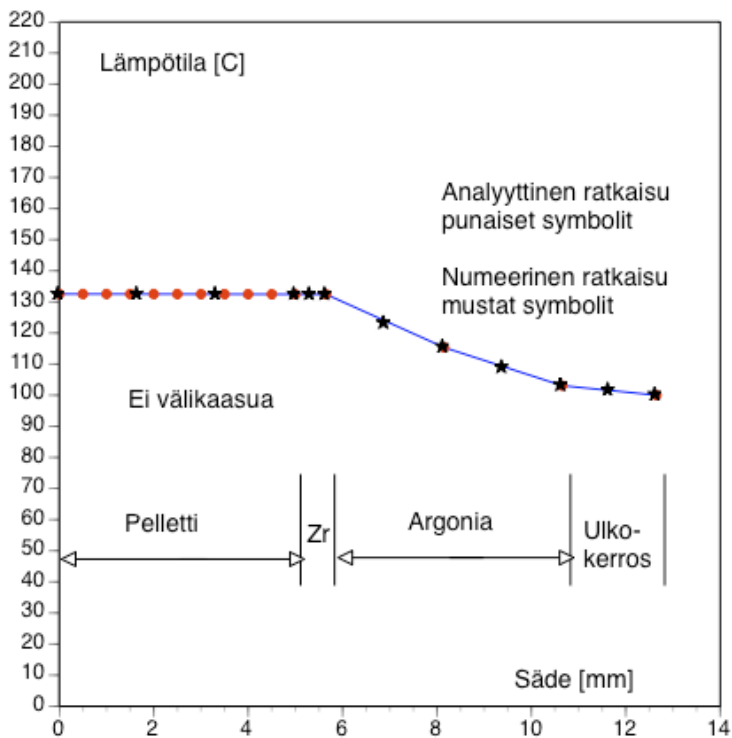
Tämä tapaus analysoitiin myös poistamalla lämmön kehittyminen pelletin vasemmalta puoliskolta (kuva A7). Erottuvien lämpötilaerojen saamiseksi pelletin alueelle, lämmönjohtavuus alennettiin arvoon 0,07 W/m/K. Maksimilämpötilaksi tuli 118,2 °C. Pelletissä generoituva teho oli 3,954 W/m ja ulkopinnan läpäisevä generoituva teho 3,914 W/m. Tämä verifiointitapaus poikkeaa ei-aksisymmetrisestä tapauksesta. Tapaukseen ei ollut eksaktia ratkaisua käytettävissä. Ainoa tarkistus-tapa oli tehobalanssi, jonka virheeksi tuli -0,17 %.



Kuva A7. Lämpötilajakauma, kun lämmönkehitystä on vain pelletin oikeassa puoliskossa. Korkein lämpötila on 118,2 °C.

Verifiointitapaus 3

Tässä verifiointitapauksessa lämmönjohtavuus argonissa asetettiin nollan suuruiseksi. Alentuneen lämmönjohtavuuden takia lämpötila nousi noin 11 °C arvosta 122 °C arvoon 133 °C (kuva A8, analyttinen ja numeerinen tulos) verrattuna tapaukseen, jossa argonin lämmönjohtavuudelle käytettiin arvoa 0,01772 W/m/K. Te hobalanssin virheeksi tuli -1,1 %. Tämä verifiointitapaus osoittaa, että numeerinen malli toimii myös tapauksessa, jossa lämpö siirtyy välitilassa pelkästään säteilemällä.



Kuva A8. Lämpötilaprofiileja, kun kaasun lämmönjohtavuus on nollan suuruinen. $\lambda_{pellet} = 7 \text{ W/m/K}$.

Nimeke	Säteilylämmönsiirron laskennasta
Tekijä(t)	Kari Ikonen
Tiivistelmä	<p>Julkaisu käsittelee säteilylämmönsiirron teoriaa, näkyvyyskertoimien määrittämistä ja säteilylämmönsiirron kytkemistä lämmönjohtumisen laskentaan kontrollitiilavuusmenetelmällä. Lämpötilan noustessa riittävän korkeaksi säteilylämmönsiirto tulee usein hallitsevaksi lämmönsiirtomekanismiksi lämmön johtumiseen ja kuljetukseen verrattuna. Rakenteiden lämpötilan ja edelleen lujuuden määrittämistä varten lämpösäteilyn vaikutus on tarpeen kytkeä rakenteiden lämpenemisen määrittäminen. Julkaisussa esitetään toisiinsa kytkeytyvien lämmön johtumisen ja säteilylämmönsiirron samanaikainen tarkastelu kontrollitiilavuusmenetelmää sovellettaessa.</p> <p>Kehitetyjä valmiuksia voidaan soveltaa käytetyn polttoaineen jäähtymisanalyysseihin, joissa polttoaineen jäähdytys tapahtuu kaasumaisessa ympäristössä, käytetyn polttoaineen vesiallasvarastoinnin analyysseihin ja loppusijoitusanalyysseihin sekä mahdollisesti ydinreaktorin seisokin aikaisten onnettomuustilanteiden tarkasteluihin. Julkaisussa on lukuisia esimerkkejä teorian ja laskentaprosessien selventämiseksi.</p>
ISBN, ISSN	ISBN 978-951-38-8043-9 (nid.) ISBN 978-951-38-8044-6 (URL: http://www.vtt.fi/publications/index.jsp) ISSN-L 2242-1211 ISSN 2242-1211 (painettu) ISSN 2242-122X (verkkojulkaisu)
Julkaisu aika	Joulukuu 2013
Kieli	Suomi, englanninkielinen tiivistelmä
Sivumäärä	74 s. + liitt. 8 s.
Projektin nimi	
Toimeksiantajat	VTT
Avainsanat	Thermal radiation, view factor, radiosity, repository, control volume method
Julkaisija	VTT PL 1000, 02044 VTT, Puh. 020 722 111

Title	Analysis of thermal radiation
Author(s)	Kari Ikonen
Abstract	<p>The publication deals with theory of thermal radiation and computation of view factors and combination of thermal radiation to calculation process of thermal heat transfer of structures. At high temperature thermal radiation becomes a dominant heat transfer mechanism in comparison to conduction and convection. For estimation of the temperature and further strength of structures, simultaneous management of thermal radiation and thermal conduction is needed. The publication presents this combination, when applying control volume method.</p> <p>In this report calculation methods and development work performed at VTT related to thermal radiation are documented. This work is funded by VTT. The development expertise and computer programs can be used in analyzing temperature inside nuclear fuel transport container when fuel element in gaseous atmosphere or in interim spent fuel storage in postulated accident cases, in repositories for final disposal or possibly in accident cases during revision outage of a nuclear reactor. There are a lot of examples for illustration of the theory and the calculation processes.</p>
ISBN, ISSN	ISBN 978-951-38-8043-9 (Soft back ed.) ISBN 978-951-38-8044-6 (URL: http://www.vtt.fi/publications/index.jsp) ISSN-L 2242-1211 ISSN 2242-1211 (Print) ISSN 2242-122X (Online)
Date	Joulukuu 2013
Language	Finnish, English abstract
Pages	74 p. + app. 8 p.
Name of the project	
Commissioned by	VTT
Keywords	Thermal radiation, view factor, radiosity, repository, control volume method
Publisher	VTT Technical Research Centre of Finland P.O. Box 1000, FI-02044 VTT, Finland, Tel. 020 722 111

Säteilylämmönsiirron laskennasta

Julkaisu käsittelee säteilylämmönsiirron teoriaa, kuten näkyvyyskertoimien määrittämistä, näkyvyyskertoimia koskevia ehtoja, säteilyn emission, absorbtion ja heijastumisen samanaikaiseen käsittelyyn käytettyä radiositeettia sekä säteilylämmönsiirron kytkemistä lämmönjohtumisen laskentaan kontrollitilavuusmenetelmällä. Lämpötilan noustessa riittävän korkeaksi säteilylämmönsiirto tulee usein hallitsevaksi lämmönsiirtomekanismiksi lämmön johtumiseen ja kuljettumiseen verrattuna. Laskentaprosessiin on tärkeitä kytkeä myös rakenteiden lämpenemisen määrittäminen lämpösäteilyn vaikutuksesta, sillä esimerkiksi betoni menettää lujuutensa jo melko alhaisessa lämpötilassa (noin 400 °C). Julkaisussa on lukuisia esimerkkejä teorian ja laskentaprosessien selventämiseksi.

Korkeissa lämpötiloissa ja konvekseissa tapauksissa säteilylämmönsiirto tasaa merkittävästi pintojen välisiä lämpötilaeroja. Tämä aiheutuu säteilylämmönsiirtoa kuvaavan Stefanin-Boltzmannin yhtälön riippuvuudesta absoluuttisen lämpötilan neljännessä potenssista.

Kehitettyjä valmiuksia voidaan soveltaa käytetyn ydinpolttoaineen jäähtymisanalyysiin, joissa polttoaineen jäähtytys tapahtuu kaasumaisessa ympäristössä, käytetyn polttoaineen vesiallasvarastoinnin analyysiin sekä loppusijoitustilan analyysiin ja mahdollisesti seisokin aikaisten onnettomuustilanteiden tarkasteluihin.

ISBN 978-951-38-8043-9 (nid.)
ISBN 978-951-38-8044-6 (URL: <http://www.vtt.fi/publications/index.jsp>)
ISSN-L 2242-1211
ISSN 2242-1211 (painettu)
ISSN 2242-122X (verkkójulkaisu)

