

3D-muodonnhaku

Menetelmiä ja sovelluksia

Timo Tossavainen, Juha Sääski, Reino Ruusu,
Tapio Salonen & Göran Granholm

ISBN 978-951-38-6628-0 (URL: <http://www.vtt.fi/publications/index.jsp>)
ISSN 1459-7683 (URL: <http://www.vtt.fi/publications/index.jsp>)

Copyright © VTT 2007

JULKAISIJA – UTGIVARE – PUBLISHER

VTT, Vuorimiehentie 3, PL 1000, 02044 VTT
puh. vaihde 020 722 111, faksi 020 722 4374

VTT, Bergsmansvägen 3, PB 1000, 02044 VTT
tel. växel 020 722 111, fax 020 722 4374

VTT Technical Research Centre of Finland, Vuorimiehentie 3, P.O. Box 1000, FI-02044 VTT, Finland
phone internat. +358 20 722 111, fax + 358 20 722 4374

Toimitus Maini Manninen



Tekijä(t) Tossavainen, Timo, Sääsäki, Juha, Ruusu, Reino, Salonen, Tapio & Granholm, Göran		
Nimeke 3D-muodohaku – Menetelmiä ja sovelluksia		
Tiivistelmä Kolmiulotteisten geometrinen mallien käyttö lisääntyy jatkuvasti tietojenkäsittelyjärjestelmien tehostuessa. Saatavilla olevien mallien määrä tulee kasvamaan räjähdysmäisesti, kun 3D-skannaus ja helppokäyttöiset mallinnusohjelmat yleistyvät. Mallien hyödyntäminen ja uudelleenkäyttö edellyttävät, että haluttu malli voidaan löytää suuresta mallien joukosta kohtuullisella vaivalla. Mallien organisoimien ja haun automatisointi ovat haastavia tutkimusongelmia. Muodon perusteella toimivia hakukoneita 3D-malleille on jo rakennettu ja aihetta tutkitaan paljon. Nykyiset hakukoneet hakevat tiettyä esimerkkiä muistuttavia malleja, jolloin tarvitaan tehokkaasti laskettavaa muodon samankaltaisuuden mittaa. Älykäs muodohaku vaatii muodon analysoimien ja ymmärtämien menetelmien kehittämistä. Näillä menetelmillä on useita sovelluksia mm. tietokoneavusteisen suunnittelun, kemian ja lääketieteen aloilla. Käsitlemme muodon samankaltaisuuden määrittämien problematiikkaa, muodonhaun menetelmiä ja muodonhaun sovelluksia erityisesti tietokoneavusteisen suunnittelun (CAD) alueella. Lopuksi ehdotamme jatkotutkimuksen aiheeksi sopivia avoimia ongelmia.		
ISBN 978-951-38-6628-0 (URL: http://www.vtt.fi/publications/index.jsp)		
Avainnimeke ja ISSN VTT Working Papers 1459-7683 (URL: http://www.vtt.fi/publications/index.jsp)		Projektinnumero 11661
Julkaisuaika Elokuu 2007	Kieli Suomi, engl. tiiv.	Sivuja 40 s.
Projektin nimi 3 D Search	Toimeksiantaja(t) Tekes, VTT	
Avainsanat product data management, shape, components, material information composition, imaging, shape retrieval, shape analysis, computer-aided design, product development, 3d-modelling	Julkaisija VTT PL 1000, 02044 VTT Puh. 020 722 4404 Faksi 020 722 4374	



Series title, number and
report code of publication

VTT Working Papers 77
VTT-WORK-77

Author(s) Tossavainen, Timo, Sääsäski, Juha, Ruusu, Reino, Salonen, Tapio & Granholm, Göran		
Title 3D Shape Retrieval – Methods and Applications		
Abstract The use of 3D geometric models increases as more computational power becomes available, and the adoption of 3D scanning and easy-to-use modelling programs rapidly increase the number of readily available 3D models. Effective use of these models requires that a suitable model can be found from a large and unorganized collection of models with relatively little effort. Automatic organization and searching of collections of geometric models are challenging research problems. Shape-based search engines have been built and the area is under active research. The present search engines retrieve models that are similar to a given exemplar based on an effectively computable metric of shape similarity. More intelligent shape search requires sophisticated methods of shape analysis and understanding. These methods have many applications, for example, in computer-aided design, chemistry, and medicine. We discuss problems related to defining shape similarity, algorithms for searching based on shape similarity, and applications of shape similarity search especially in computer-aided design. Finally, we review open problems suitable for further research.		
ISBN 978-951-38-6628-0 (URL: http://www.vtt.fi/publications/index.jsp)		
Series title and ISSN VTT Working Papers 1459-7683 (URL: http://www.vtt.fi/publications/index.jsp)		Project number 11661
Date August 2007	Language Finnish, English abstr.	Pages 40 p.
Name of project 3 D Search	Commissioned by Tekes, VTT Technical Research Centre of Finland	
Keywords product data management, shape, components, material information composition, imaging, shape retrieval, shape analysis, computer-aided design, product development, 3d-modelling	Publisher VTT Technical Research Centre of Finland P.O. Box 1000, FI-02044 VTT, Finland Phone internat. +358 20 722 4404 Fax +358 20 722 4374	

Alkusanat

Tämä raportti on tuotettu osana VTT:n 3D Search-projektia, jonka tavoitteena oli selvittää muotoon perustuvien hakukoneiden toimintaa, muodonhaun hyödynnettävyyttä käyttäjä- ja sidosryhmien näkökulmasta ja muodonhaun teollisuussovelluksia.

3D Search on osin Tekesin rahoittama. Projekti käynnistyi 1.9.2006 ja sen oli määrä päättyä 31.12.06, mutta projektille myönnettiin jatkoaikaa 30.4.2007 asti. Projektin johtoryhmässä työskentelivät projektiryhmän ulkopuolelta Riikka Virkkunen (VTT) ja Matti Säynätjoki (Tekes). Kiitämme heitä ja muita projektia edistäneitä.

Espoossa 17.8.2007

Tekijät

Sisältö

Tiivistelmä	3
Abstract	4
Alkusanat	5
1. Johdanto	7
2. Muodonhaku	10
2.1 Muotojen samankaltaisuus	10
2.2 Muotojen esittäminen	12
2.3 Muodon rekisteröinti	14
2.4 Piirrevektorit	19
2.5 Monimutkaiset piirteet	24
2.6 Hakumenetelmät	26
2.7 Muodonhaun hyvyyden mittaaminen	28
3. Yksinkertainen hakukone	30
4. Muodonhaun sovelluksia	31
4.1 Muodonhaku tuotekehitysprosessissa	32
4.2 Muodonhaku tuotetiedonhallinnassa	34
5. Yhteenveto	35
5.1 Jatkotutkimus	35
Lähdeluettelo	38

1. Johdanto

Nykyisin tuotetaan suuria määriä 3D-malleja mitä erilaisimmissa sovellusalueiden tarpeista syntyneissä esitysmuodoissa. 3D-skannauksen halpeneminen sekä ilmaiset ja helpokäyttöiset sovellukset 3D-mallien tuottoon, esimerkiksi Googlen Sketch-Up, johtavat saatavilla olevien 3D-mallien määrän räjähdysmäiseen kasvuun. Insinööritoimistoissa tuotetaan jatkuvasti uusia suunnitelmia ja samoja asioita saatetaan suunnitella turhaan uudelleen: Uuden suunnitelman pohjana voidaan usein käyttää vanhaa suunnitelmaa.

Valmiiden mallien käyttö edellyttää sopivan mallin löytämistä; mallin etsiminen organisoimattomasta mallien joukosta on kuitenkin työlästä. Tietojenkäsittelyn keskeisimpiä haasteita on organisoida käsiteltävät asiat. Muodon tapauksessa tämä on haasteellista, koska on vaikeaa määritellä intuitiivisia ja samalla laskennallisesti tehokkaita kriteereitä muotojen vertailuun ja luokitteluun. Käsitys muodon samankaltaisuudesta liittyy läheisesti aistimekanismeihin, joten kriteereiden pohjana voidaan käyttää esimerkiksi havaintopsykologian teorioita ihmisen tavasta tunnistaa muotoja näköhavainnon perusteella.

Muodon laskennallista käsittelyä on tutkittu paljon esimerkiksi tietokonegrafiikan, laskennallisen geometrian, tekoälyn (erityisesti konenäön) ja tietokoneavusteisen suunnittelun (CAD) alueilla. Myös uusia tutkimusalueita, kuten laskennallinen topologia (Dey et al. 1999), on syntynyt. Maailmalla tunnettuja muodonhakuun ja muotoon liittyvään päättelyyn keskittyneitä tutkimusryhmiä ja verkostoja ovat mm.

- Purduen yliopiston PRECISE, joka keskittyy muodonkäsittelyyn insinöörisuunnittelussa ja proteomiikassa.
- Princetonin yliopiston “Shape Retrieval and Analysis Group”.
- Euroopan unionilla on Network of Excellence -verkosto AIM@SHAPE, joka keskittyy kokonaan muodon käsittelyn problematiikkaan. Verkoston koordinaattorina toimii Genovan yliopiston “Shape Modelling Group”, joka on tunnettu muodon ymmärtämiseen liittyvien tekniikoiden kehittämisestä.
- Kuvannus- ja multimediatutkimus Utrechtin yliopistossa.

3D-malleille on kehitetty useita hakukoneita, mm. (Funkhouser et al. 2003). Yksi niistä on esitetty kuvassa 1. Muodonhaku perustuu yleensä samankaltaisuuteen: Käyttäjä antaa hakukoneelle esimerkkimallin, ja hakukone palauttaa indeksoimansa mallit samankaltaisuusjärjestyksessä. Kehittyneemmissä järjestelmissä hakukriteeriä mukautetaan käyttäjän palautteen perusteella, ja haku voi perustua myös käyttäjän piirtämään luonnokseen.

Yksi tärkeimmistä muotoa käsittelevistä aloista on tietokoneavusteinen suunnittelu. Informaatioteknologian nopea kehitys yhdistettynä tietokoneiden halpenemiseen on johtanut 3D-CAD-ohjelmien laajaan hyödyntämiseen yrityksissä. Perinteiset CAD-ohjelmat ovat kehittyneet tukemaan tuotekehitystä ja integroituneet PDM- ja PLM-järjestelmiksi. Nämä järjestelmät hallitsevat tuotetietoa tuotteen elinkaaren ajan: konseptoinnista käyttöön



Kuva 1. Technionin tutkijoiden kehittämä 3D-mallien hakukone "Georgle".

ja hävittämiseen asti. Tuotetieto, mm. komponentit, materiaalitiedot, valmistus, simulointitulokset, kokoonpano, kustannukset ja huolto, sisältää suunnittelutietämyksen, joka on valmistavan yrityksen tärkeää henkistä pääomaa. Tätä organisaatiossa olevaa pääomaa ei voida hyödyntää täysimääräisesti, jos sitä ei voida helposti uudelleenkäyttää. Esimerkiksi uuden tuotteen tuotekehitysprojektissa suunnittelijat käyttävät paljon aikaa suunnittelemalla komponentteja, jotka on suunniteltu jo aikaisemmin yrityksen samassa tai eri toimipisteissä. Gunn (1982) väittää, että usein vain 20 % komponenteista vaatii uudelleensuunnittelua ja 80 % komponenteista voitaisiin käyttää olemassa olevista suoraan tai pienillä muutoksilla. Ullman (1997) väittää, että 75 % suunnittelutehtävistä koostuu olemassa olevan suunnittelutiedon uusiokäytöstä tuotteen suunnittelussa.

Tuotetiedon uudelleenkäytettävyys edellyttää "työkalua", joka pystyy tunnistamaan ja hakemaan samankaltaisia komponentteja. Näin olemassa olevaa tuotetietoa voidaan soveltaa uusien tuotteiden suunnittelussa, mikä mahdollistaa korkean laadun alhaisin kustannuksin

nopealla toimitusprosessilla. Suunnittelijan näkökulmasta tuotetiedon uudelleenkäytettävyys tarkoittaa komponenttien etsimistä samankaltaisten ominaisuuksien, kuten muodon, materiaalin, valmistusmenetelmän, toleranssien ja käyttötarkoituksen, perusteella. Näistä muotoa on kaikkein vaikein vertailla. Se myös vaikuttaa merkittävästi päätöksiin tuotekehitysprosessissa. Muodon tunnistava “työkalu” vähentäisi komponenttikirjoa ja edesauttaisi nimikkeiden ja varaston hallintaa ja komponenttien ostotoimintaa.

Käsitlemme seuraavaksi muodonhaun perusongelmat ja nykyiset menetelmät, esitämme potentiaalisia sovelluksia muodonhauille ja analyysille erityisesti tietokoneavusteisen suunnittelun alueella ja lopuksi esitämme aiheita muodonhakuun liittyvälle jatkotutkimukselle.

2. Muodonhaku

Tarkoitamme muodonhaualla 3D-mallien hakemista tietokannasta toisten muotojen perusteella. Rajaamme ulkopuolelle hakumenettelyt, joissa käytetään hyväksi muuta kuin muotoon liittyvää tietoa, kuten tekstiä tai rakenteista tuotetietoa. Tällaisesta hakumenettelystä käytetään yleisesti nimitystä *sisältöperustainen haku* (engl. *content based retrieval*).

Käytännössä muodonhaku tehdään samankaltaisuuden perusteella. Hakukoneen käyttäjä voi antaa hakukoneelle mallin, pyytää sitä etsimään samankaltaisia malleja ja selata malleja jonkinlaisessa samankaltaisuusjärjestyksessä. Käyttäjä voi navigoida mallien avaruudessa pyytämällä hakukonetta hakemaan muodot, jotka ovat samankaltaisia kuin jokin edellisen haun tuloksena palautettu malli. Kehittyneemmissä järjestelmissä käyttäjä voi antaa hakukoneelle palautetta haun onnistuneisuudesta, ja hakukone voi mukauttaa samankaltaisuuden käsitettä käyttäjän tarpeiden mukaan.

Muodonhakuun liittyviä laskennallisia ongelmia on useita, mm.

- Hae tietty malli tietokannasta.
- Hae annettua mallia muistuttavat mallit.
- Hae mallit, joiden osana on annettu malli.
- Hae kahdesta mallista niiden osat, jotka ovat samanlaisia.
- Hae mallit, joista annettu malli koostuu.

Käsitlemme tässä vain annettua mallia muistuttavien mallien hakemisen menetelmiä eli samankaltaisuushakua. Käymme läpi pääasiassa tapoja määritellä laskettavissa oleva muotojen samankaltaisuuden käsite. Tavat voidaan jakaa suoriin vertailuihin muotojen geometrian perusteella ja vertailuihin muotojen kompaktien esitysten, muodon kuvaajien, perusteella. Edelleen muodon kuvaajat voidaan jakaa yksinkertaisiin piirvektoreihin ja monimutkaisempiin rakenteisiin esityksiin, kuten topologiaan graafeihin. Lopuksi tarkastelemme lyhyesti muodon tehokasta hakemista tietokannasta samankaltaisuuden perusteella sekä laskennallisen tehokkuuden että käytettävyyden näkökulmasta.

2.1 Muotojen samankaltaisuus

Milloin kaksi muotoa ovat samankaltaisia? Kaksi ihmishahmoa ovat samanlaisempia kuin ihminen ja auto, mutta ovatko ihminen ja auto samankaltaisempia kuin ihminen ja kukkaruukku. Kysymykseen on mahdotonta vastata yksikäsitteisesti. Muodonhauassa tarvitaan kriteereitä, jotka vastaavat intuitiivista käsitystä samankaltaisuudesta ja jotka ovat helposti laskettavissa muodon kuvauksista. Käsitys samankaltaisuudesta riippuu sovellusalasta. Varmaa on, ettei samankaltaisuuden käsite riipu kappaleen paikasta eikä asennosta; mallin pitäisi löytyä tietokannasta, jos sitä haetaan omalla kierretyllä ja siirretyllä kopiollaan.

Joissakin tapauksissa ei myöskään olla kiinnostuneita mittakaavasta ja voidaan myös haluta, että venytetyt muodot täsmäävät toisiinsa.

Ongelman tarkempaan pohtimiseen tarvitaan formaalimpi kehys. Kuvaamme kappaleet avaruuden \mathbb{R}^3 osajoukkoina ja käytämme niistä myös termiä *pistejoukko*. Merkitsemme muotojen joukkoa joukon \mathbb{R}^3 osajoukkojen joukkona symbolilla $P(\mathbb{R}^3)$. Felix Kleinin Erlangenin ohjelmassa geometria määriteltiin annetusta muunnosryhmästä riippumattomien (invarianttien) relaatioiden tutkimukseksi. Joukon muunnoksella tarkoitetaan joukon kääntyviä kuvauksia itselleen ja muunnosryhmällä tarkoitetaan kuvausten yhdistämisen ja käänteiskuvauksen suhteen suljettua kuvausten joukkoa. Muoto on olennaisesti geometrinen käsite, joten Kleinin näkökulmasta voidaan nähdä myös muotojen samankaltaisuus eli muoto on jotain mikä ei muutu, kun kappaleelle tehdään jotain, esimerkiksi siirretään sitä paikasta toiseen. Relaatiota $R \subset X$ sanotaan muunnosryhmästä T *riippumattomaksi* (tai *T -invariantiksi*), jos $x \in R \iff t(x) \in R$ aina, kun $x \in X$ ja $t \in T$. Joukko X voi olla esimerkiksi tason suoraparien joukko, R sen osajoukko, joka koostuu samansuuntaisten suorien pareista, ja T jostain tason kuvausryhmästä muodostettu ryhmä, jossa parin molemmat suorat kuvataan samalla tason kuvauksella. Tällöin, jos R on T -invariantti, niin T säilyttää samansuuntaisuuden.

Matematiikassa on useita samankaltaisuuden käsitteitä, kuten esimerkiksi kongruenssi, similaarisuus ja homotooppisuus. Pistejoukot ovat keskenään *kongruentteja*, jos ne voidaan kuvata toisikseen etäisyydet säilyttävillä kuvauksilla eli isometrioilla. Samankaltaisuuden käsite on isometriainvariantti: Muoto pysyy samana kun kappaletta siirretään, kierretään tai peilataan. Pistejoukot ovat *similaarisia*, jos ne voidaan kuvata toisikseen isometrian ja skaalauksen yhdisteiden eli similariteettien avulla. Samankaltaisuuden käsite on similariteetti-invariantti: Muoto pysyy samana kun kappaletta siirretään, kierretään tai peilataan tai sen mittakaavaa muutetaan. Pistejoukot ovat *homotooppisia*, jos ne voidaan venyttää toisikseen jatkuvien kuvausten avulla. Samankaltaisuuden käsite on homotopiainvariantti: Muoto pysyy samana kun kappaletta venytetään mielivaltaisesti, mutta sitä ei revitä eikä leikata. Homotooppisessa samankaltaisuudessa kahvikupin ja munkkirinkilän muoto on sama, koska molemmissa on yksi reikä.

Edellisille samankaltaisuuden käsitteille on yhteistä, että pistejoukot ovat joko samankaltaisia tai eivät. Samankaltaisuuteen perustuvassa haussa on pystyttävä mittaamaan samankaltaisuuden asteita — muuten hakukone palauttaa joko yhden tai ei yhtään vastausta. Yleensä samankaltaisuuden määrittelemiseen käytetään etäisyysmittaa. Funktiota $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sanotaan *etäisyysmitaksi* eli *metriikaksi*, jos ehdot

1. $d(x, y) \geq 0$ (ei-negatiivisuus)
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (identtisyys)
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrisyys)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (kolmioepäyhtälö)

ovat voimassa aina, kun $x, y, z \in X$, ja joukkoa, jossa on määritelty metriikka, kutsutaan *metriseksi avaruudeksi*.

Metriikan käytöllä saavutetaan laskennallisia etuja muodonhaussa, koska kolmioepäyhtälöä voidaan hyödyntää indeksirakenteissa. Toisaalta ei ole intuitiivista syytä, miksi samankaltaisuusmitan pitäisi toteuttaa kolmioepäyhtälö. Kyselyiden tehokas toteuttaminen täysin vapaamuotoiselle samankaltaisuusmitalle on mahdotonta: Kyselyn käsittelyn aikana jo lasketuista samankaltaisuuksista ei voitaisi päätellä mitään vielä laskemattomista samankaltaisuuksista.

Mallinamme tässä samankaltaisuuden käsitteen muotojen joukossa määriteltynä etäisyysmittana. Emme kuitenkaan määrittele muotojen joukkoa eksplisiittisesti; käytännössä muodot määritellään hakukoneelle ja tietokannalle pistejoukkoina, joiden etäisyys määritellään jollakin laskettavalla etäisyysmitalla d . Tällöin muotojen joukko on implisiittisesti ekvivalenssin

$$A \sim B \iff d(A, B) = 0 \tag{1}$$

määrittelemien ekvivalenssiluokkien joukko: Etäisyysmitta määrää pistejoukkojen jaon erilaisiin luokkiin, muotoihin. Määrittelemme jatkossa useita erilaisia etäisyysmittoja, jotka johtavat erilaisiin ja epäintuitiivisiin muotojen käsitteisiin. Jotain muodoista voidaan kuitenkin sanoa. Jos d on T -invariantti, niin muodot ovat myös T -invariantteja. Esimerkiksi, jos d on jokin etäisyysmitta pistejoukkojen välillä ja vertailtavien pistejoukkojen keskipisteet siirretään origoon ennen etäisyyden laskemista, niin saadaan siirtoinvariantti etäisyysmitta ja siirrosta riippumaton muodon käsite. Käytännössä haetaan etäisyysmittaa, joka on ainakin isometriainvariantti, yleensä myös similariteetti-invariantti, ja jonka arvo muuttuu vähän, jos pistejoukkoja muutetaan vähän. Tämä takaa sen, että samankaltaisia ovat ainakin intuitiivisesti samankaltaiset muodot — samankaltaisia voivat olla lisäksi muutkin intuitiivisesti erilaiset muodot.

Käytännössä ihmisen käsitykseen samankaltaisuudesta ei päästä yksinkertaisilla menetelyillä, jotka käyttävät pelkkää muototietoa. Käytämme kuitenkin samankaltaisuuden arviointiin muodon perustella tunnistetun objektin muita ominaisuuksia, kuten sen käyttötarkoitusta. Yksi muodonhaun keskeisistä ongelmista on määritellä samankaltaisuus niin, että se vastaa sovelluksen tarpeita. Sovellukset todennäköisesti tarvitsevat useita erilaisia samankaltaisuusmittoja. Samankaltaisuusmittaa ja samalla samankaltaisuuden käsitettä voidaan myös joutua säätämään käyttäjän palautteen perusteella.

2.2 Muotojen esittäminen

Mielivaltaisia pistejoukkoja ei voida esittää tietokoneella, joten joukkojen esitystapaa täytyy jotenkin rajoittaa. Tyypillisimmät hakusovelluksissa esiintyvät muotojen esitykset ovat kolmioverkkoihin perustuva *reunaesitys* (engl. *boundary representation*, *b-rep*) ja *konstrukttiivinen kiinteän kappaleen geometria* (engl. *constructive solid geometry*, *CSG*). Muodon esitys vaikuttaa tietenkin siihen soveltuviin hakumenetelmiin. CSG-esitys voidaan muuttaa reunaesitykseksi, mutta päinvastainen suunta ei yleensä onnistu.

Käsitlemme jatkossa vain reunaesitystä kolmioiden avulla, koska kaikki mallit voidaan käytännössä muuttaa kolmiomalleiksi mielivaltaisen pienellä virheellä, ja kolmiomalleilla on yksinkertainen rakenne, joka helpottaa hakualgoritmien tekoa. Kolmioihin perustuvat reunaesitykset ovat yleensä sellaisia, etteivät ne määrittele yksikäsitteisesti kappaleen sisä- ja ulkopuolta, vaan reunojen esitykset saattavat mm. sisältää reikiä ja degeneroituneita rakenteita.

Pinnan näytteistäminen. Samalla kappaleella voi olla useita erilaisia reunaesityksiä ja kappale voidaan esittää eri tarkkuuksilla. Vaihtelevan esityksen ongelmia voidaan usein kiertää näytteistämällä kappaleen pinnalta äärellinen pistejoukko. Myös monet haussa käytettävät piirteet lasketaan kappaleen pinnalta satunnaisesti valittujen pisteiden avulla (kuva 2). Satunnaisten pisteiden valitseminen kolmiojoukolla kuvatun kappaleen pinnalta ei ole aivan triviaalia.

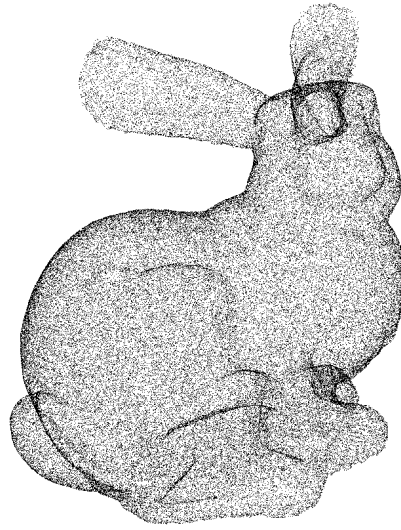
Tarkastellaan ensin satunnaisen pisteen valintaa kolmiosta. Monet helpot ideat johtavat menettelyihin, joissa kolmion pisteiden valinnan todennäköisyys ei ole yhtä suuri. Esimerkiksi kolmioiden keskellä olevien pisteiden valintatodennäköisyys on suurempi kuin reunoilla olevien, jos pisteet valitaan tasan jakautuneiden barysentristen koordinaattien avulla. Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ kolmion kulmapisteitä. Jos A ja B ovat riippumattomia ja välillä $[0, 1]$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia (eli $A, B \sim U(0, 1)$), niin

$$X(A, B) = \begin{cases} A\mathbf{u} + B\mathbf{v} + (1 - A - B)\mathbf{w}, & A + B \leq 1, \\ (1 - A)\mathbf{u} + (1 - B)\mathbf{v} + (A + B - 1)\mathbf{w}, & A + B > 1, \end{cases} \quad (2)$$

on tasan jakautunut kolmion sisällä, merkitään $X \sim \mathbf{uvw}$. Perusteluna (A, B) on tasan jakautunut neliössä $[0, 1]^2$, josta saadaan kaksi kolmiota, kun se jaetaan suoran $B = 1 - A$ suhteen. Otos on edelleen tasan jakautunut näiden kolmioiden sisällä, joten ne voidaan samaistaa yhdeksi kolmioksi. Saatu kolmio voidaan kuvata kolmioksi \mathbf{uvw} lineaarisella kuvauksella, joka ei vaikuta jakauman tasaisuuteen.

Satunnainen kolmiojoukon pinnan piste generoidaan valitsemalla ensin kolmio pinta-alan mukaisella todennäköisyydellä ja valitsemalla sitten pinnan piste tasaisesti valitusta kolmiosta. Kolmion valinta pinta-alojen mukaisella todennäköisyydellä voidaan tehdä esimerkiksi inversiomenetelmällä (Devroye 1986, sivu 89): Numeroidaan ensin kolmiot ja lasketaan kolmioiden pinta-alan kertymäfunktio kolmioiden suhteen taulukkoon, jossa on indeksi jokaiselle kolmiolle. Generoidaan satunnaisluku $A \sim U(0, 1)$ ja valitaan kolmio, joka vastaa kertymäfunktion taulukossa väliä jolle A osuu. Lukua A vastaava väli löydetään tehokkaasti binäärihaulla.

Käytämme hieman myöhemmin pistejoukkojen odotusarvoa ja kovarianssia. Tällöin kyseessä on esitetyllä menettelyllä pistejoukosta muodostettu satunnaismuuttuja.



Kuva 2. Näytteistys: 100 000 satunnaisesti valittua pistettä mallin pinnalta.

2.3 Muodon rekisteröinti

On melko helppoa määritellä etäisyysmitta d pistejoukoille kiinnittämättä huomiota tavoiteltaviin invariansseihin. Tällaisesta mitasta saadaan luonnollisella tavalla T -invariantti mitta d' määrittelemällä se pienimmäksi etäisyydeksi, joka saavutetaan soveltamalla vapaasti muunnosryhmää T pistejoukkoihin, eli

$$d'(A, B) = \inf_{s, t \in T} d(s(A), t(B)). \quad (3)$$

Esimerkiksi isometrioiden tapauksessa tällä määritelmällä jouduttaisiin tekemään tyhjentävä haku kappaleiden paikoista ja asennoista, mikä on laskennallisesti liian raskasta. Tyhjentävä haku voi onnistua, jos kappaleet ensin kuvataan tiivistetysti piirrevektorilla, jonka kuvautuminen siirrossa ja kierrossa on helppo laskea, ja niiden etäisyys määritellään piirrevektoreiden etäisyytenä. Toinen ratkaisu on normalisoida kappaleet kanoniseen asentoon pistejoukosta lasketulla muunnosjoukon T muunnoksella. Tätä kutsutaan *muodon rekisteröinniksi*. Tällöin haetaan T -invarianttia funktiota $f : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$, jolla

$$f(A) = f(t(A)) \quad (4)$$

aina, kun $t \in T$, ja etäisyys määritellään

$$d'(A, B) = d(f(A), f(B)). \quad (5)$$

Lisäksi pyritään saamaan f robustiksi pienille joukon A muutoksille. Kolmas ratkaisu on käyttää vertailussa suoraan T -invariantteja piirteitä eli funktio f yllä ei kuvaakaan pistejoukkoa pistejoukoksi, vaan pistejoukon piirteiksi. Usein päädytään eräänlaiseen hybridiin rekisteröinnin ja tyhjentävän haun välillä; mm. symmetriset tai lähes symmetriset kappaleet on vaikeaa kääntää vakioituun asentoon muodon perusteella, mutta voidaan

löytää kuvauksia, jotka rajoittavat mahdollisten asentojen joukkoa. Tarkastelemme tässä similariteetti-invarianssin saavuttamista: Normalisoidaan pistejoukon paikka, skaalaus ja kierto.

Paikan normalisointi. Annetun muunnoksen poistamiseksi pistejoukosta on löydettävä pistejoukon funktio, joka muuttuu yksinkertaisella tavalla kyseisessä muunnoksessa. Siirron tapauksessa voidaan tietysti tarkastella yksittäisen pisteen paikkaa, mutta tietyn kanonisen pisteen löytäminen voi olla vaikeaa varsinkin, jos samalla tavoitellaan muita invariansseja tai aineisto on kohinaista. Pistejoukon A odotusarvo $\mathbb{E}A$ käyttäytyy siirrossa $A + \mathbf{d}$ yksinkertaisesti

$$\mathbb{E}(A + \mathbf{d}) = \mathbb{E}A + \mathbf{d} \quad (6)$$

ja on melko robusti kohinalle ja pienille muutoksille, joten siirron poistoon voidaan käyttää funktiota

$$f(A) = A - \mathbb{E}A. \quad (7)$$

Voidaan lisäksi osoittaa, että jos kaksi pistejoukkoa, joille pisteiden vastaavuus tunnetaan, siirretään ensin origoon odotusarvon perusteella, niin kaikki toisen pistejoukon siirrot liittyvät vastinpisteiden keskineliöetäisyyttä.

Skaalan normalisointi. Skaalan poistamiseksi voidaan skaalata kappale läpimitallaan. Vastinpisteparien keskietäisyyden kannalta optimaaliseksi skaalaukseksi voidaan osoittaa skaalaus, jonka jälkeen pistejoukkojen keskimääräinen varianssi (koordinaattien varianssien summa) on sama ja käytännössä tämä varianssi skaalataan arvoksi 1.

Asennon normalisointi. Asennon normalisointi on vaikeampaa kuin paikan tai skaalan. Pitäisi löytää jokin helppo kriteeri, joka kiinnittää pistejoukon asennon. Perinteinen tapa on tutkia pistejoukon A kokoa eri suuntiin. Tämä voidaan tehdä ainakin osittain sen kovarianssin $\text{Cov}(A)$ avulla. Kovarianssimatriisi kertoo kuinka pistejoukko on keskimäärin jakautunut eri suuntiin ja siitä voidaan suoraan laskea jakauman projektion varianssi annettuun suuntaan. Varianssin ääriarvot suunnan suhteen kiinnittävät suunnat, joita kutsutaan *pääakseleiksi*. *Pääakselit* voidaan laskea kovarianssimatriisista spektraalihajotelman avulla:

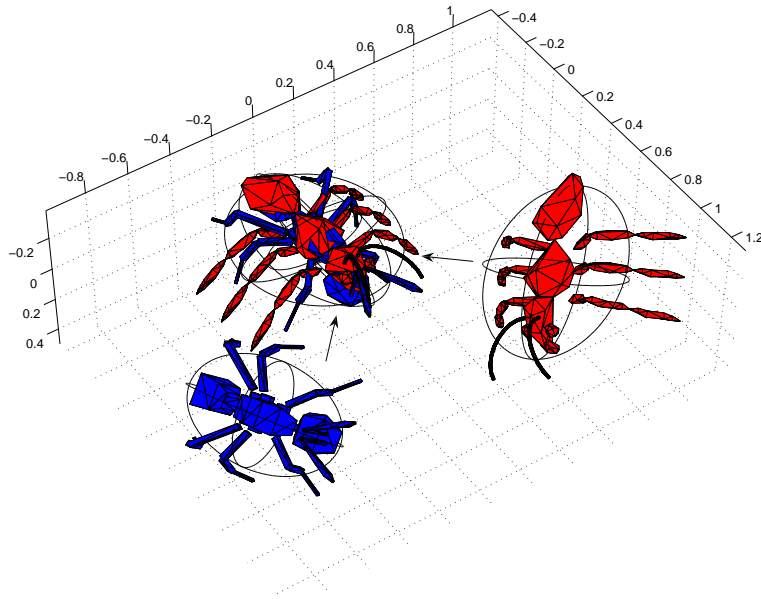
$$\text{Cov}(A) = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^T, \quad (8)$$

missä \mathbf{R} on kiertomatriisi ja $\mathbf{\Lambda}$ on diagonaalimatriisi, joka sisältää kovarianssimatriisin ominaisarvot suuruusjärjestyksessä. Kiertomatriisin sarakkeet antavat akselien suunnan ja niitä vastaavat ominaisarvot pistejoukon varianssin akselin suuntaan. Asennon ja paikan normalisoimiseksi kappale kuvataan kuvauksessa

$$f(A) = \mathbf{R}^T(A - \mathbb{E}A). \quad (9)$$

Menettelyä on havainnollistettu kuvassa 3 kahdella erilaisella muurahaisen mallilla.

Symmetriset tai lähes symmetriset kappaleet aiheuttavat ongelmia. Jos mallin kovarianssimatriisilla on samoja ominaisarvoja, niin matriisi \mathbf{R} ei ole yksikäsitteinen. Toisaalta pääakselien suunta on kiinnitetty vain merkin tarkkuudella, joten asentoon voi tulla 180 asteen kiertoja pääakseleiden ympäri. Näissä tapauksissa voidaan käyttää jotain muuta



Kuva 3. Muotojen rekisteröinti ja vertailu kanonisessa asennossa.

kriteeriä, jolla asento voidaan kiinnittää yksikäsitteisesti. Vaihtoehdot voidaan myös käsitellä tyhjentävästi.

Pistejoukon odotusarvo ja kovarianssi voidaan estimoida Monte Carlo -menetelmällä näytteistämällä kappaleen pintaa. Kolmioilla esitetyn mallin pinta-alan jakauman odotusarvo ja kovarianssi saadaan myös suljetussa muodossa.

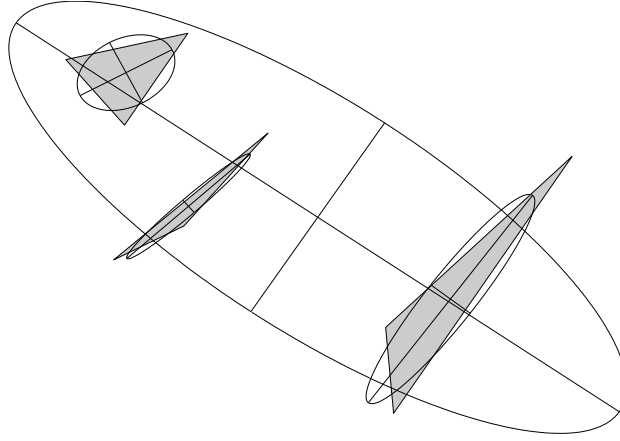
Näytteistäminen äärettömän tiheästi. Kolmiojoukolla määriteltyä pintaa voidaan joskus käsitellä myös äärettömän tiheästi näytteistettynä. Tällöin pinta koostetaan kolmion muotoisten tasaisten jakaumien yhdisteenä, jossa kunkin kolmiojakauman paino on sen suhteellinen pinta-ala.

Monet menetelmät tarvitsevat jakaumien odotusarvoa ja kovarianssia, joten johdamme tässä ne kolmiojakaumalle. Tarkastellaan ensiksi yksinkertainen tapaus, joka voidaan yleistää: kolmio

$$\Delta = \{(X, Y) : X \geq 0, Y \geq 0, X + Y \leq 1\}, \quad (10)$$

jonka yksi kulma on origo ja kaksi muuta kulmaa positiivisilla koordinaattiakseleilla yhden yksikön päässä origosta. Tämän jakauman odotusarvo saadaan integraalista

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2 \, dy \, dx = 1/3. \quad (11)$$



Kuva 4. Kolmioiden pintapisteiden jakaumien ja yhdistetyn jakauman kovarianssit (95 %:n luottamusellipsi normaaliapproksimaatiolla).

Jakauman kovarianssimatriisin alkiot saadaan edelleen integroimalla

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}Y)^2 = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2(x - 1/3)^2 dy dx = 1/18, \quad (12)$$

$$\mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\} = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2(x - 1/3)(y - 1/3) dy dx = -1/36. \quad (13)$$

Jakauman keskiarvo ja kovarianssi ovat

$$\mathbb{E}(\Delta) = \frac{1}{3}(1, 1), \quad \text{Cov}(\Delta) = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Kolmio voidaan kuvata mielivaltaiseksi kolmioksi \mathbf{uvw} yksinkertaisella lineaarisella kuvauksella

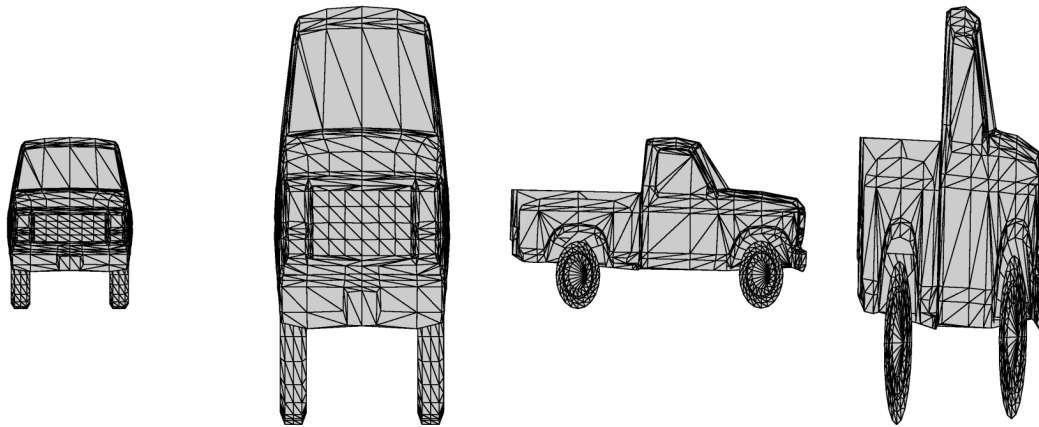
$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax} + \mathbf{u} = (\mathbf{v} - \mathbf{u} \quad \mathbf{w} - \mathbf{u}) \mathbf{x} + \mathbf{u} \quad (15)$$

ja tuloksena syntyvän jakauman keskiarvo ja kovarianssi ovat

$$\mathbb{E}(\mathbf{uvw}) = \mathbf{A}\mathbb{E}(\Delta) + \mathbf{u}, \quad \text{Cov}(\mathbf{uvw}) = \mathbf{A}\text{Cov}(\Delta)\mathbf{A}^T. \quad (16)$$

Tarkastellaan mallin pintapisteiden jakauman parametrien laskemista eli tilannetta, jossa pisteet valitaan satunnaisesti kolmioista niiden pinta-alan perusteella. Olkoot pistejoukossa A kolmiot $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, joiden pinta-alat ovat A_1, A_2, \dots, A_n . Ehdollistamalla satunnainen pinnan piste kolmioihin voidaan helposti johtaa pistejoukon odotusarvo ja kovarianssi

$$\mathbb{E}A = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \mathbb{E}(\Delta_i)}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad \text{Cov}(A) = \frac{\sum_{i=1}^n A_i (\text{Cov}(\Delta_i) + (\mathbb{E}(\Delta_i) - \mathbb{E}A)(\mathbb{E}(\Delta_i) - \mathbb{E}A)^T)}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (17)$$



Kuva 5. Muodon anisotrooppisen skaalauksen poisto. Alkuperäinen malli ja malli pyöristettynä.

Sama tulos voidaan johtaa myös vaikeammin ehdollistamatta (Papadakis et al. 2007). Kolmioihin liittyviä jakaumia on havainnollistettu Kuvassa 4. Mallin asennon normalisointia em. odotusarvon ja kovarianssin perusteella kutsutaan *jatkuvaaksi pääkomponenttianalyysiksi* (engl. *continuous principal components analysis, CPCA*).

Anisotropia. Joskus tarvitaan samankaltaisuuden kriteeriä, joka ei riipu kappaleen yksinkertaisista venytyksistä. Voidaan haluta, että kaikki suorat putket ovat samankaltaisia riippumatta niiden pituudesta ja halkaisijasta. Tällöin kappaletta voidaan ennen vertailua skaalata siten, että sen pituus jokaiseen suuntaan on kutakuinkin vakio. Kappale on *anisotrooppinen*, jos sen mitat eri suuntiin poikkeavat merkittävästi, ja *isotrooppinen*, jos sen mitat eri suuntiin ovat kutakuinkin samat, joten voidaan puhua anisotropian normalisoinnista. Samankaltaisuus, johon siirrot, kierrot ja skaalaukset akseleiden suhteen eivät vaikuta, on affiini-invariantti. Kuten aiemmin todettiin, pistejoukon “pituutta” eri suuntiin voidaan mitata sen kovarianssimatriisilla. Siirtämällä pistejoukon keskiarvo origoon ja kertomalla se sitten kovarianssimatriisinsa käänteismatriisin neliöjuurella saadaan pistejoukko, jonka kovarianssimatriisi on identtinen matriisi.

Menettelyä ei voida suoraan soveltaa mallin pinta-alan jakaumalle: Pistejoukon kovarianssin normalisoiva kuvaus muuttaa mallin kolmioiden pinta-aloja, joten pinta-alan kovarianssi ei käyttydy kuvauksissa kuten pistejoukon kovarianssi. Kazhdan et al. (2004) esittävät menetelmän, jolla pinta-alan kovarianssimatriisi saadaan normalisoitua. Normalisoidaan kappale kovarianssin perusteella, lasketaan uusi pinnan kovarianssimatriisi ja iteroidaan kunnes kovarianssimatriisi ei enää muutu. Lisäksi tutkijat soveltavat menetelmää määrittelemään samankaltaisuuden, jonka käsittelyssä erotetaan skaalojen ja muodon ero toisistaan. Kuvassa 5 anisotrooppisen skaalauksen normalisointia sovelletaan auton malliin.

2.4 Piirrevektorit

Muotojen välisen etäisyyden määrittäminen suoraan on vaikeaa, joten muodot kuvataan jonkin tiiviin koodauksen, *muodon kuvaajan* (engl. *shape descriptor*) avulla. Toisaalta monet intuitiiviset samankaltaisuudet, esimerkiksi pienin keskimääräinen etäisyys niiden kappaleiden pintojen välillä niiden asennon ja paikan suhteen, ovat niin laskentaintensiivisiä etteivät ne sovellu hakuun, jossa yhtä mallia joudutaan vertaamaan tuhansiin tietokannan sisältämiin malleihin. Muodon kuvaajia voidaan käyttää esisuodatuksena, jolla karsitaan tarkemmin vertailtavien mallien määrää.

Kun käytetään muodon kuvaajaa $f : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow D$ ja etäisyysmittaa $d : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$, niin muotojen A ja B määritellään olevan *samankaltaisia*, jos $d(f(A), f(B))$ on pieni. Samankaltaisuuden käsite riippuu siis kuvaajasta ja kuvaajien välisestä etäisyydestä. Emme kiinnittäneet muodon kuvaajan arvojoukkoa, koska kuvaaja voi olla myös jokin rakenteinen esitys, esimerkiksi graafi. Käytännössä samankaltaisuuden käsite tulee sisältämään epäintuitiivisesti samanlaisia muotoja, koska kuvaajan muodostaminen hukkaa informaatiota.

Käsittelemme tässä tapauksen, jossa kuvaaja on kiinteän mittainen vektori reaalityyppisiä eli $f : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^n$, jolloin sitä kutsutaan myös *piirrevektoriksi*. Piirrevektoreilta toivottavia ominaisuuksia ovat mm. pieni tallennustilan tarve, laskennallinen tehokkuus, nopea täsmäys, muodon erottelukyky, invarianssi tiettyjen muunnosten suhteen, kohinansietokyky, epäherkkyys kappaleen topologian vaihteluille ja degeneroituneiden mallien sietokyky.

Piirrevektoreista on kirjoitettu useita laajoja survey-artikkeleita (Tangelder & Velkamp 2004, Iyer et al. 2005, Bustos et al. 2005) ja tutkijat ehdottavat uusia piirrevektoreita jatkuvasti. Uusimpia ovat (Papadakis et al. 2007, Shih et al. 2007, Gal et al. 2007). Gal et al. (2007) esittelemä menetelmä täsmää samoista osista koostuvat muodot, vaikka niiden osat olisivat eri asennoissa. Tällöin löydetään esimerkiksi ihmismallilla hakemalla eri asennoissa olevat ihmismallit tietokannasta. Bustos et al. (2005) esittävät erään luokittelun piirrevektoreille (Taulukko 1). Käymme tässä läpi muutamia perusmenetelmiä esimerkinomaisesti.

Geometriset momentit. Monissa tilastotieteen sovelluksissa todennäköisyysjakaumista tarvitaan vain momenteja tai niiden johdannaisia, kuten odotusarvoa tai varianssia. Vastaavalla tavalla muotoja voidaan approksimoida niiden momenteilla. Kappaleen momentti m_{pqr} määritellään

$$m_{pqr} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q z^r \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad (18)$$

missä $\rho(x, y, z) = 1$, jos piste x, y, z kuuluu kappaleeseen, ja $\rho(x, y, z) = 0$, muulloin. Tämä määritelmä toimii käytännössä vain kappaleille, joiden esitys sisältää niiden tilavuuden, ja silloinkin kappale yleensä piirretään vokseliruudukolle ja momentti lasketaan summamalla se vokseleissa, jotka ovat kappaleen sisällä. Kolmioidusta pintaesityksestä momentin voi arvioida esimerkiksi ottamalla pinnan pisteistä satunnaisotos $\{(x_i, y_i, z_i) : i =$

Taulukko 1. Luokittelu muodon hakumenetelmille. (Bustos et al. 2005)

Piiirvektori	Tilastollinen	yksinkertainen parametroitu geometriset 3D-momentit muodon jakauma säikeet
	Pituus	sädepohjainen monimutkainen varjostus
	Tilavuus	diskretoitu tilavuus muotohistogrammi kiertoriippumaton pisteparvi vokselointi kiertoriippumaton palloharmoninen peilaussymmetriat painotettu pistejoukko
	Pinta	normaalien suunta muodon spektri laajennettu Gaussin kuva kanoninen 3D Houghin muunnos
	Kuva	silhuetti syvyyspuskuri valokenttä
Ei-piiirvektori		topologinen täsmäys luurankopohjainen kiertokuva

$1, 2, \dots, n$ ja käyttämällä otosmomenttia

$$\hat{m}_{pqr} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p y_i^q z_i^r. \quad (19)$$

Kummassakin tapauksessa kappaleen asento on ensin normalisoitava, että momenteja voidaan verrata keskenään. Korkeammat momentit ovat erityisen herkkiä kohinalle, joten niiden laskemiseksi täytyy ottaa suuri satunnaisotos.

Muotohistogrammit. Mallin pinta voidaan ajatella pisteiden jakaumana. Jakaumia approksimoidaan usein histogrammeilla, joten on luonnollista yrittää approksimoida näin myös muotoja. Ankerst et al. (1999) esittelevätkin muodon histogrammit samankaltaisuushakun ja luokitteluun avaruudellisissa tietokannoissa. Erilaisia esityksiä saadaan valitsemalla jokin pintapisteiden funktio, jonka jakaumaa tarkastellaan. Esimerkiksi tutkimalla pinnan pisteiden etäisyyttä mallin painopisteestä saadaan *kuoriesitys* (engl. *shells*), joka on riippumaton mallin paikasta ja orientaatiosta. Kun pinnan pisteiden paikka suhteessa painopisteeseen esitetään napakoordinaateissa, saadaan *sektoriesitys* (engl. *sectors*) tutkimalla kulmia. Kuori- ja sektoriesitykset voidaan yhdistää tutkimalla napakoordinaatteja sellaisenaan. Histogrammin jakotiheys määrää esityksen tarkkuuden.

Gaussin kuva. Gaussin kuva kuvaa mallin pinnan pisteen yksikköpallolle pinnan normaalin mukaan. Hornin (1984) esittelemä *laajennettu Gaussin kuva* (engl. *Extended Gaussian Image, EGI*) on mallin pinta-alan jakauma pinnan normaalin suhteen. Kuva on luonnollisesti riippumaton kappaleen paikasta. Käytännössä kolmioidun mallin kolmioiden pinta-ala jaetaan niiden normaalien suuntien mukaan histogrammiin. *Kompleksinen laajennettu Gaussin kuva* (engl. *Complex Extended Gaussian Image, CEGI*) on funktion $\exp(i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$ jakauma mallin pinnalla pinnan normaalin \mathbf{n} suhteen (Kang & Ikeuchi 1991). Käytännössä CEGI lasketaan jakamalla kolmioiden pinta-alat histogrammiin niiden painopisteiden perusteella ja skaalaamalla mallit niin, ettei eksponenttikuvauksen sykliisyys vaikuta tulokseen.

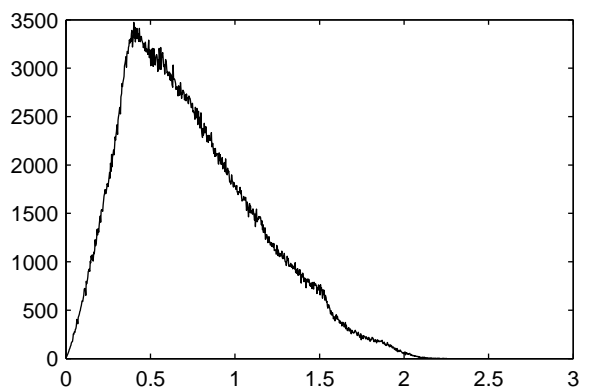
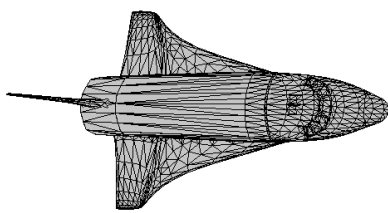
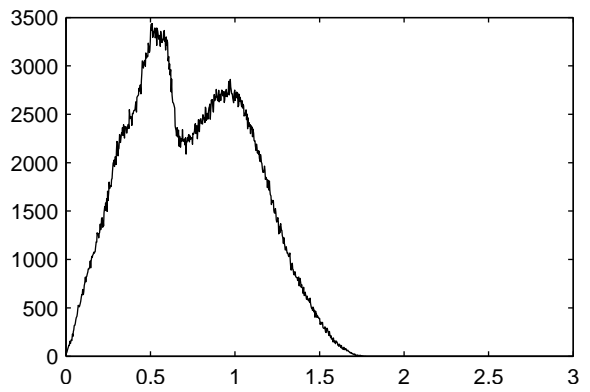
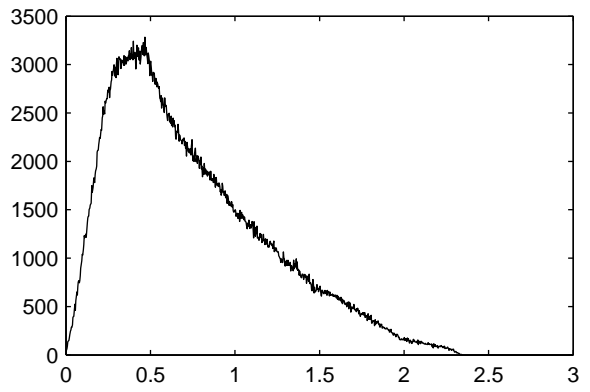
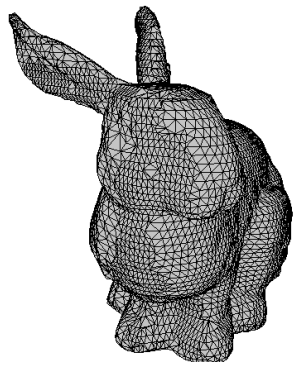
Muodon jakaumat. Osada et al. (2002) käyttävät geometrisen piirteiden jakaumia kuvaamaan muotoa. Tällaisia ovat mm.

- A3 kolmen kappaleen pinnalla olevan pisteen välinen kulma
- D1 annetun avaruuden pisteen (yleensä kappaleen painopiste) ja kappaleen pinnalla olevan pisteen välinen etäisyys
- D2 kahden kappaleen pinnalla olevan pisteen etäisyys
- D3 kolmen kappaleen pinnalla olevan pisteen määrittämän kolmion pinta-alan neliöjuuri
- D4 neljän kappaleen pinnalla olevan pisteen määrittämän tetraedrin tilavuuden kuutiojuuri

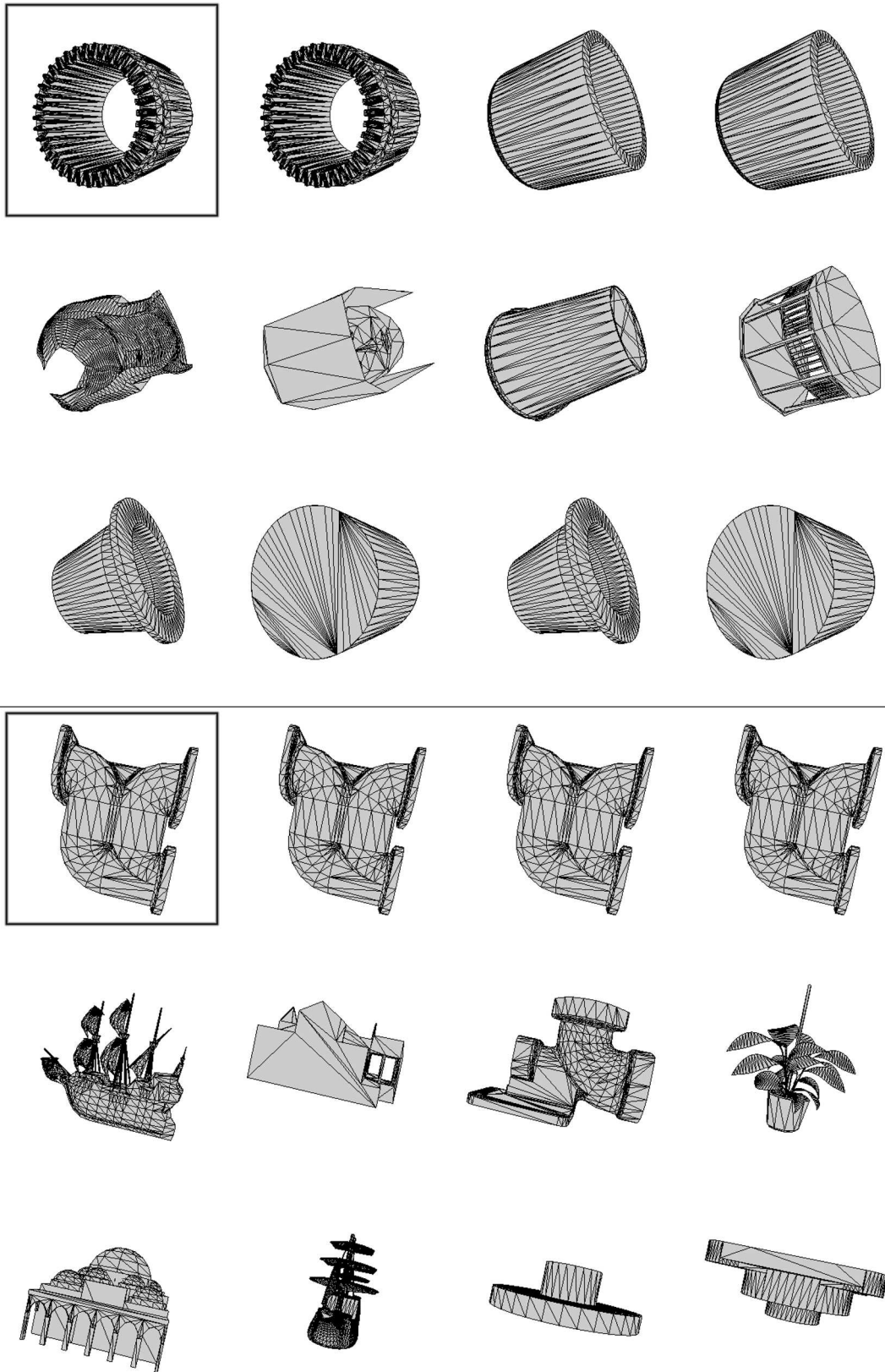
Osada et al. (2002) tallentavat jakauman paloittain lineaarisena funktiona eli murtoviivana. Kuvaus lasketaan ad hoc -menetelmällä ottamalla jakaumasta satunnaisotanta, muodostamalla tasavälinen histogrammi ja siitä empiiristä jakaumaa approksimoiva tasavälinen paloittain lineaarinen funktio. Testien mukaan 1 024 ämpäriä ja 1 024² näytettä ja 64 murtoviivan katkopistettä tuottavat riittävän hyvän tarkkuuden ja pienen varianssin. He mainitsevat kuitenkin, että näytteistysmenetelmässä on vielä kehittämisen varaa. Jakaumien vertailuun on useita menetelmiä, kuten Kullbackin-Leiblerin divergenssi, χ^2 , Bhattacharyaan etäisyys, ja L_N -metriikat. L_N -metriikat soveltuvat sekä tiheys- että kertymäfunktioiden vertailuun. Esitetyt muodon jakaumat ovat riippumattomia mallin paikasta ja asennosta; mallien mittakaavan ero hoidetaan etsimällä samankaltaisuuden maksimoiva suurennus. Kuvassa 6 on esitetty kolmen mallin D2-jakaumat, jotka on normalisoitu keskiarvon perusteella. Jakaumat esitetään 1024 ämpäriin histogrammilla välillä $[0, 3]$. Muutama esimerkkihaku on esitetty kuvassa 7.

Piirrevektoreiden etäisyys. Piirrevektoreiden etäisyys tai samankaltaisuus voidaan määrittellä usealla eri tavalla. Euklidinen etäisyys on metriikoista yleisesti käytetyin. Muita mahdollisia ovat mm. Minkowskin ℓ_p -metriikat

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (20)$$



Kuva 6. Kolme mallia ja niiden näytteistämällä estimoidut D2-jakaumat.



Kuva 7. Kaksi erilaista hakua tietokannasta D2-kuvaajan perusteella. Haettu malli on vasemmassa yläkulmassa ja samankaltaisimmat mallit etäisyysjärjestyksessä vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas.

Piirvektorin komponentit ovat usein jotenkin riippuvaisia toisistaan samankaltaisuuden mielessä: Histogrammin kaksi vierekkäistä ämpäriä ymmärretään samankaltaisemmiksi kuin kaksi kaukana olevaa ämpäriä. Euklidinen etäisyys ja ℓ_p -metriikat yleensä eivät ota tätä huomioon, vaan käsittelevät ämpärit samanarvoisina koordinaattiakseleina. Tällaisessa tilanteessa voidaan määrittellä etäisyys neliömuodon avulla:

$$d_{\mathbf{A}}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} - \mathbf{v})^T \mathbf{A} (\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad (21)$$

missä a_{ij} kuvaa koordinaattien i ja j samankaltaisuutta. Näin määritelty etäisyys on lähellä tilastotieteessä esiintyvää Mahalanobiksen metriikkaa. Neliömuotoon päädytään, jos tarkastellaan vektoreiden euklidista etäisyyttä kääntyvän lineaarisen kuvauksen jälkeen. Kääntäen, neliömuodon määrittelevä matriisi on symmetrinen ja positiivisesti definiitti, jolloin se voidaan jakaa neliöjuurtensa tuloksi. Näin saadaan kuvaus $\mathbf{A}^{1/2}$, jonka jälkeen vektorien vertailu euklidisella etäisyydellä vastaa neliömuodon määrittelemää metriikkaa.

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{A}}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} - \mathbf{v})^T \mathbf{A} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u} - \mathbf{v})^T \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{A}^{1/2} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{u} - \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{v})^T (\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{u} - \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{v}) = d^2(\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{u}, \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (22)$$

Monidimensioisesta piirvektorista ja neliömuodon määrittelemästä etäisyysmitasta voidaan johtaa yksikertaisempi mataladimensioinen (pseudo)etäisyysmitta, joka antaa tiukan alarajan etäisyydelle. Esimerkiksi spektraalihajotelmasta $\mathbf{A} = \mathbf{R} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mathbf{R}^T$, missä $\lambda_i \geq \lambda_j$, kun $i \leq j$ ja $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ saadaan:

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{A}}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} - \mathbf{v})^T \mathbf{A} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u} - \mathbf{v})^T \mathbf{R} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mathbf{R}^T (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &\geq (\mathbf{u} - \mathbf{v})^T \mathbf{R} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, 0, \dots, 0) \mathbf{R}^T (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (23)$$

Euklidisen metriikan tapauksessa tämä tarkoittaa muutaman koordinaatin pudottamista pois etäisyyslaskelmista, kun hajotelmana käytetään identtisiä matriiseja. Indeksointiin voidaan näin käyttää mataladimensioisia tietorakenteita ja välttyä osittain moniulotteisuuden aiheuttamilta ongelmilta.

2.5 Monimutkaiset piirteet

Piirvektoreihin perustuvissa menetelmissä muotoa kuvaava rakenne on kiinteän mittainen vektori. On selvää, ettei tällainen menettely sovellu kuvaamaan monimutkaisia muotoja, eikä se toisaalta tue muita muodontäsmäyksen tapauksia kuin pelkkää mallin täsmäämistä toiseen. Vaihtoehtoiset menetelmät perustuvat usein eri tavoin muodostettuihin mallin luurankoihin. Mediaaliakselimuunnos (engl. medial axis transformation) muodostaa objektin luurangon sen sisään mahtuvien suurimpien pallojen keskipisteiden joukkona; lisätietona voidaan tallentaa pallojen säteet. Toinen tapa kuvata muunnos on tutkia

joukon sisäpisteiden etäisyyttä kappaleen reunasta. MAT:n luuranko on näin määritellyn etäisyysfunktion kriittiset pisteet. Mediaaliakselimuunnoksen laskeminen on kuitenkin niin raskasta, ettei sitä voida käytännössä käyttää. Mediaaliakselimuunnosta on laajennettu *tärähdysgraafeihin* (engl. *shock graph*), joita voidaan soveltaa muodonhakuun (Siddiqi et al. 1998).

Topologia on matematiikan haara, joka tutkii yhtenäisyyden problematiikkaa. Objektin topologialla käsitetään yleensä ominaisuuksia, jotka säilyvät mielivaltaisissa kääntyvissä jatkuvissa kuvauksissa. Tyypillisiä tällaisia ominaisuuksia ovat objektin sisältämien reikien määrä ja sen komponenttien yhtenäisyys. Pelkästään topologisten ominaisuuksien tutkiminen ei tietenkään riitä; onhan tunnettua, ettei topologi erota kahvikuppia munkkirinkilästä. Topologian menetelmistä on kuitenkin hyötyä muodon täsmäyksessä, koska topologisten ominaisuuksien avulla voidaan rajoittaa keskenään täsmättävien objektin osien määrää ja topologiassa käytettyjen menetelmien avulla voidaan johtaa muodontäsmäykseen soveltuvia menetelmiä. Topologian menetelmiä on käytetty aiemmin mm. pinnan muotojen koodaukseen (Shinagawa et al. 1991).

Hilaga et al. (2001) esittävät topologiaan perustuvan menetelmän muodon samankaltaisuuden määrittelemiseksi. Differentiaalitopologiaan kuuluva Morsen¹ teoria tutkii kappaleiden topologiaa niillä määritellyn sileän reaaliarvoisen funktion avulla. Tällaisen funktion kriittiset pisteet (satulat, maksimit ja minimi) määrittävät kappaleen topologian. Muodon täsmäyksessä käsiteltävät funktiot ovat yleensä määriteltyjä kappaleen pinnalla. Vastaavien funktioiden avulla voidaan muodostaa ns. Reebin graafi, joka on yksi muodontäsmäyksessä käytettävistä luurankorakenteista. Reebin graafi muodostetaan joukosta M ja sileästä funktiosta $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$. Funktiota μ avulla määritellään joukon M pisteille ekvivalenssirelaatio, jonka ekvivalenssiluokkia ovat funktion μ tasojoukkojen yhtenäiset komponentit. Reebin graafi on joukon M (topologinen) tekijäavaruus tämän ekvivalenssirelaation suhteen.

Teknisestä määritelmästä huolimatta Reebin graafi on intuitiivisesti ymmärrettävissä. Kappaleen pinta jaetaan paloihin (tasojoukkoihin), joissa funktion μ arvo on vakio. Palat eivät ole välttämättä yhtenäisiä; Reebin graafissa jokainen erillinen pala puristetaan yhdeksi pisteeksi ja palojen kehitystä seurataan funktion μ arvon muuttuessa. Esimerkiksi kartan tapauksessa μ voi olla on korkeus, jolloin tasojoukot ovat kartan siivuja korkeuskäyrien kohdalta. Reebin graafissa on tällöin erillinen haara jokaista kartan huippua kohti ja graafin haarautuminen tapahtuu korkeudella, jossa huiput eroavat toisistaan.

Reebin graafin muoto riippuu tietenkin funktiosta μ . Kartan tapauksessa korkeus tuottaa järkeväen graafin, mutta pituus- tai leveyspiiri eivät, koska ne eivät yleisesti ottaen jaa karttaa erillisiin yhtenäisiin komponentteihin. Muodontäsmäyksessä on lisäksi hyödyllistä, jos μ määritellään siten, ettei se riipu kappaleen asennosta eikä paikasta. Tällaisia funktioita ovat esimerkiksi pinnan pisteen etäisyys kappaleen painopisteestä ja pinnan pisteen geodeettinen etäisyys (eli etäisyys pintaa pitkin) jostakin annetusta pinnan pisteestä. Jälkimmäinen näistä kärsii referenssipisteen yksikäsitteisen valinnan vaikeudesta ja ensimmäiseen vaikuttavat kappaleen ulokkeiden asento, joten Hilaga et al. (2001) määrittelevät

¹Marston Morse (1892–1977), yhdysvaltalainen matemaatikko.

funktioksi μ pisteen keskimääräisen etäisyyden pinnan muihin pisteisiin. Määritelmä tietenkin edellyttää, että kappaleen pinta on yhtenäinen.

Topologian täsmäys. Hilaga et al. (2001) kehittävät samankaltaisuuden arvioinnin menetelmän, *topologian täsmäyksen*. He laajentavat Reebin graafin hierarkkiseksi *monen tarkkuuden Reebin graafiksi* (engl. *multiresolution Reeb graph, MRG*) ja vertailevat kappaleita niiden MRG:n perusteella. MRG:n laskemiseksi valitaan ensin haluttu jakotarkkuus. Aloitetaan ensin koko mallista. Funktion μ arvoalue jaetaan kahtia ja vastaavasti mallin pinta jaetaan arvoalueita vastaaviin paloihin. Muodostetaan jakoalueiden yhtenäiset komponentit ja merkataan niitä graafin solmulla. Kaksi solmua yhdistetään särmällä, jos niitä vastaavat alueet ovat vierekkäisiä ja ne olivat yhtenäisiä ennen jakoa. Solmuja vastaavat alueet jaetaan edelleen kahtia ja saadut solmut lisätään jaetun solmun lapsiksi puurakenteeseen. Menettelyä jatketaan kunnes saavutetaan haluttu tarkkuus. Tarkimmalla tasolla jokaiseen solmuun tallennetaan siihen kuuluvasta pinnan osasta jokin piirretieto, kuten pinta-ala, ja ylemmillä tasoilla piirteet summataan lapsisolmuista.

Kahden MRG:n samankaltaisuus määritellään solmujen sisältämien piirteiden avulla. Kahden solmun samankaltaisuus määritellään suoraan niiden piirteistä laskettuna arvona. Graafeista yritetään täsmätä mahdollisimman monta solmuparia siten, että täsmäys säilyttää topologisen johdonmukaisuuden. Graafien samankaltaisuus on kaikkien täsmättyjen solmuparien samankaltaisuuksien summa.

Biasotti et al. (2006) ovat soveltaneet kehittämiään laajennettuja Reebin graafeja mallien samankaltaisten vastinosien löytämiseen. Menetelmän pohjimmaisena ideana on täsmätä objektien Reebin graafien aligraafeja sallien tietty määrä virheitä. Graafien aligraafien likimääräinen täsmäys on laskennallisesti erittäin vaikea ongelma, mutta usein muodon täsmäyksessä esiintyvät graafit ovat riittävän pieniä, että menettely onnistuu.

Johnson & Hebert (1999) esittävät kiertokuviin perustuvan menetelmän, jolla voidaan etsiä osittaisesta 3D-näkymästä, esimerkiksi 3D-skannauksen tuloksesta, ne tietokannan mallit jotka esiintyvät siinä.

2.6 Hakumenetelmät

Hakumenetelmällä tarkoitetaan tässä menetelmää, jolla käyttäjä ohjaa hakua ja toisaalta algoritmeja ja tietorakenteita, jotka mahdollistavat tehokkaan vastaamisen käyttäjän määrittelemään hakuun. Näitä kahta ei oikeastaan voida erottaa toisistaan.

Käytetty muodon kuvaus määrää pitkälti hakumenetelmän. Piirrevektoreiden tapauksessa käytetään yleensä *lähimmän naapurin hakua* (engl. *nearest neighbor search*), jossa haetaan n annettua muotoa lähinnä olevaa muotoa, tai haetaan muodot, jotka ovat annetun etäisyyden sisällä annetusta muodosta. Käyttäjä voi antaa esimerkkimallin tai tietokannasta haetaan ensiksi satunnainen joukko malleja, joiden avulla käyttäjä tarkentaa hakua. Naiivi lähimmän naapurin haku laskee etäisyyden jokaiseen tietokannan malliin, lajittelee ne etäisyysjärjestykseen, ja näyttää n ensimmäistä hakutuloksena. Suurilla tietokannoilla

naiivi menettely ei tietenkään toimi, mutta muodonhaun tapauksessa haun tehostaminen on erittäin haasteellista ja vaatii monimutkaista indeksointia. Tehokkuuden lisäksi hakumenetelmän tulisi olla käytettävä eli käyttäjän tulisi ymmärtää, tai ainakin oppia intuitiivisesti ymmärtämään, miten haku etenee ja pystyä löytämään haluamansa mallit nopeasti pienellä määrällä hakuja. Yksi mahdollinen ratkaisu on relevanssipalaute, jossa käyttäjä antaa hakukoneelle palautetta sen hakutuloksista.

Indeksointi. Piirvektorit ovat yleensä huomattavan monidimensioisia, ja monien tunnettujen indeksirakenteiden suorituskyky heikkenee ulottuvuuksien määrän kasvaessa, tätä kutsutaan *dimensionaalisuuden kiroukseksi* (engl. *curse of dimensionality*). Indeksoinnilla tarkoitetaan rakenteita, joilla nopeutetaan hakua tietokannasta. Lähimmän naapurin haussa etäisyyden perusteella käytetään yleensä rakenteita, jotka hyödyntävät metriikan toteuttamaa kolmioepäyhtälöä. Chávez et al. (2001) käsittelevät menetelmiä indeksointiin kiinteällä etäisyysmitalla survey-tutkimuksessaan. Beygelzimer et al. (2006) kehittivät *peitepuu*-rakenteen (engl. *cover tree*), joka vie $O(n)$ tilaa ja vastaa lähimmän naapurin kyselyyn ajassa $O(\log n)$ tietokannan koon n suhteen. Yleisemmässä tapauksessa neuvoa voi hakea Sametin yli tuhatsivuisesta teoksesta (Samet 2006), joka on kokonaan omistettu monidimensioisen datan käsittelylle ja indeksoinnille. Indeksointi Reebin graafeille ja muille monimutkaisille muotoa kuvaaville rakenteille on edelleen avoin ongelma.

Relevanssipalaute. Relevanssipalaute (engl. *relevance feedback*) on menetelmä, jolla pyritään ottamaan haussa huomioon hakijan subjektiivinen käsitys samankaltaisuudesta. Koska muotojen samankaltaisuus riippuu haettavasta kohteesta ja sen käyttötarkoituksesta, johtaa kiinteän samankaltaisuusmitan käyttäminen usein huonoihin tuloksiin. Heikko tulosjoukko johtaa usein myös pidempään haku aikaan, koska sopivaa mallia joudutaan loppujen lopuksi etsimään laajasta joukosta epärelevantteja tuloksia.

Relevanssipalaute pyrkii helpottamaan tätä ongelmaa siten, että hakumenetelmää tarkennetaan käyttäjän antaman palautteen perusteella. Tämä tapahtuu tyypillisesti siten, että käyttäjä valitsee yleensä pienestä hakutulosten joukosta hyvin ja huonosti tarkoitusta vastaavat tulokset. Tämän jälkeen hakukone optimoi vertailuperusteet sellaisiksi, että valitut tulosjoukot saadaan mahdollisimman hyvin erotettua toisistaan.

Uusilla vertailuperusteilla saadaan uusi joukko hakutuloksia, joiden avulla palauteprosessia voidaan edelleen jatkaa, kunnes saadut tulokset ovat tyydyttäviä. Usein kuitenkin jo yksi palautekierros parantaa tuloksia merkittävästi. Leifman et al. (2005) toteavat, että menetelmällä voidaan paitsi parantaa hakutuloksia, myös rajata niitä. Tällä tarkoitetaan sitä, että haku voi perustua enemmän palautteeseen kuin haettavaan alkuperäismalliin, mikä mahdollistaa sen, että alkuperäisen vertailukohteen ei tarvitse olla kuin hyvin viitteellisesti samankaltainen haettavien kohteiden kanssa.

Relevanssipalautetta voidaan soveltaa myös hakuun, jossa ei käytetä lainkaan esimerkigeometriaa. Tällöin haku aloitetaan esittelemällä käyttäjälle mahdollisimman kattava joukko malleja tietokannasta, joista käyttäjän antaman palautteen avulla muodostetaan todennäköisyystiheystimaatti haettavalle piirvektoreiden joukolle.

Yksinkertaisimmillaan tämä tarkoittaa vertailukohteena olevan piirrevektorin laskemista valittujen esimerkkien keskiarvona. Monimutkaisemmissa menetelmissä voidaan kuitenkin myös negatiivisia esimerkkejä käyttää rajaamaan haettua malliavaruutta (Elad et al. 2001, Bang & Chen 2002). Tällöin päädytään kuitenkin helposti ylioppimiseen, mikä saattaa olla selityksenä sille, että Leifmanin et al. (2005) sinänsä yksinkertainen menetelmä on todettu edellä viitattuihin nähden ylivertaiseksi.

Leifman et al. (2005) ovat kehittäneet tehokkaan, mutta yksinkertaisen, piirrevektorien projisointiin perustuvan relevanssipalautemenetelmän. Menetelmässä yhdistetään *lineaarista diskriminanttianalyysiä (LDA)* ja *vinoutunutta diskriminanttianalyysiä* (engl. *biased discriminant analysis, BDA*) haun eri vaiheissa (Fukunaga 1990, Duda et al. 2000, Zhou & Huang 2001). LDA toimii paremmin haun alkuvaiheessa, kun käytettävissä on vain muutama näyte, kun taas BDA toimii huomattavasti paremmin kun käytettävissä on suurempi määrä käyttäjän valitsema esimerkkejä ja vastaesimerkkejä.

Menetelmän tehokkuudesta kertoo artikkelissa esitetty esimerkkihaku, jossa kahdella iteraatiolla päästään tulosjoukkoon, joka sisältää ainoastaan kitaroita. Alkuperäisestä tulosjoukosta on pudotettu pois veitset, pistoolit, mikrofonit, tikkukaramellit ym. geometrisesti hyvin samankaltaiset esineet.

2.7 Muodonhaun hyvyuden mittaaminen

Muodonhaun ehkä keskeisin ongelma on määrittellä samankaltaisuus niin, että haku tuottaa hyödyllisiä tuloksia. Esimerkiksi aiemmin esitelty D2-muotojakauma löytää melko hyvin saman mallin eri asennoissa, eri kokoisina ja erilaisilla pinnan esityksillä. Mallien väliseen vertailuun se ei välttämättä sovi. Sopivan hakukriteerin löytäminen jollekin sovellukselle tai sellaisen tekeminen edellyttävät että kriteereitä voidaan jotenkin vertailla hakutuloksen suhteen.

Shilane et al. (2004) yrittävät ratkaista tätä ongelmaa esittämällä Princetonin yliopiston muotohaun testipenkin (Princeton Shape Benchmark, PSB) hakumenetelmien vertailua varten. PSB sisältää yli 1 800 mallia, jotka on luokiteltu hierarkkisten funktionaalisten ja semanttisten käsitteiden alle. PSB:n avulla voidaan tutkia erilaisten hakukriteereiden toimivuutta erilaisilla kappaleiden luokilla, kuten luonnollinen ja keinotekoinen. Toinen tutkimuskäyttöön saatavilla oleva tietokanta on Purduen yliopiston insinöörisuunnittelun muotohaun testipenkki (Engineering Shape Benchmark, ESB) (Jayanti et al. 2006).

Muodonhaun tuloksia vertaillaan usein *tarkkuus-saanti-käyrien* (engl. *precision-recall curves*) avulla. Ensiksi tietokanta on luokiteltava halutun tuloksen suhteen. Muodonhaku tuottaa yleensä jonkinlaisen järjestyksen malleille suhteessa haettavaan ja malleja voidaan palauttaa useita. Tavoitteena on mitata, kuinka hyvin halutut mallit ovat hakutuloksen alkupäässä. Olkoot

$$M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\} \quad (24)$$

tietokannan mallit järjestyksessä hakutuloksessa ja merkitään

$$M_i = \{m_1, m_2, \dots, m_i\} \subset M. \quad (25)$$

Olkoot lisäksi $C \subset M$ se mallien luokka, johon kuuluva mallia haetaan. Haun *tarkkuus* (engl. *precision*) p_i ja *saanti* (engl. *recall*) r_i , kun palautetaan i tulosta ovat

$$p_i = \frac{|M_i \cap C|}{|M_i|}, \quad r_i = \frac{|M_i \cap C|}{|C|}, \quad (26)$$

missä $|\cdot|$ on joukon alkioden lukumäärä. Lisäksi määritellään usein *herkkyys* (engl. *sensitivity*) s_i ja spesifisyys (engl. *specificity*) z_i

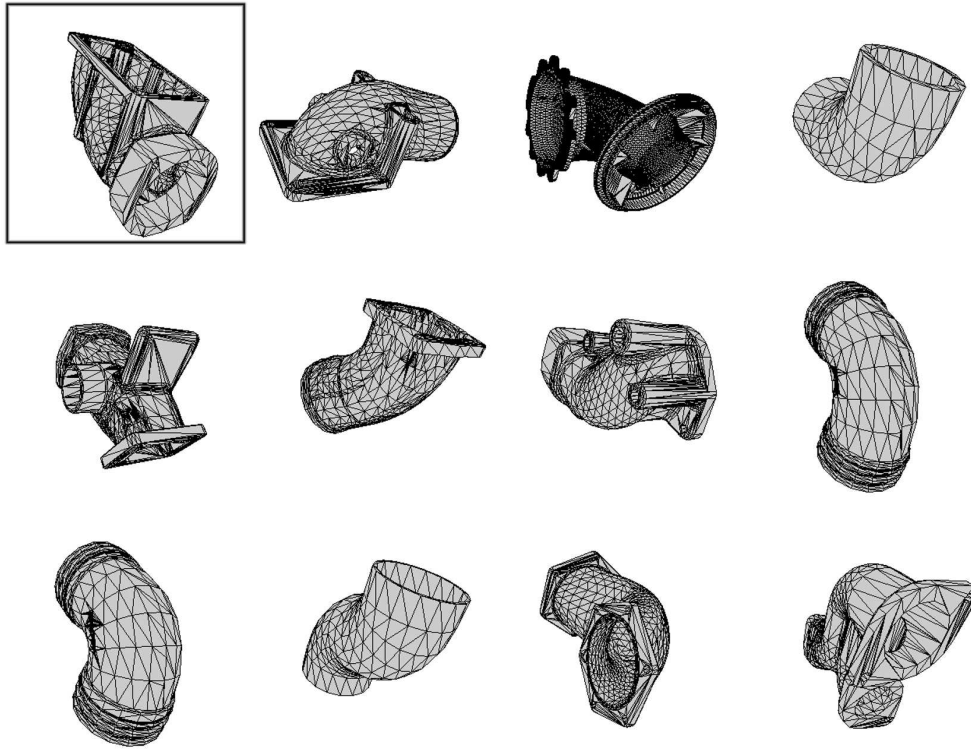
$$s_i = \frac{|M_i \cap C|}{|C|}, \quad z_i = \frac{|M \setminus (M_i \cup C)|}{|M \setminus C|}. \quad (27)$$

Yhdelle hakumallille käyrä saadaan hakemalla niin monta mallia kuin tarvitaan että koko luokka on hakutuloksessa ja piirtämällä murtoviiva pisteiden (r_i, p_i) läpi muuttujan i kasvavilla arvoilla kunnes $r_i = 1$. Tietokantahakuja arvioitaessa käyrät keskiarvoistetaan mallien tai luokkien suhteen. Parempi hakutulos hakukriteerin suhteen tuottaa ylempänä olevan (eli tarkemman) käyrän. Tarkkuus voidaan myös keskiarvoistaa haettavien malliluokkien yli, jolloin saadaan keskimääräinen tarkkuus.

Ensimmäisen ja toisen tason mitat (engl. *first and second tier measure*) mittaavat saantia ensimmäisessä $|C|$ ja $2|C|$ tulostuloksissa. Hakukoneen käyttäjälle näytetään usein tietty määrä ensimmäisistä haetuista malleista, joten niihin osuvien relevanttien vastausten määrä on erityisen mielenkiintoinen. *E- ja F-mitat*

$$E = \frac{2}{1/p_k + 1/r_k}, \quad F = \frac{b^2 p_k r_k + p_k r_k}{b^2 p_k + r_k}, \quad (28)$$

missä b on mittaa kontrolloiva parametri, mittaavat sekä saantia että tarkkuutta ensimmäisessä k tuloksessa. Hakukriteeriä voidaan optimoida mm. yhdistämällä aiemmin esiteltyjä piirrekteoreita ja painottamalla niiden etäisyyksiä eri tavoin.



Kuva 8. Haku ESB-tietokannasta D2-kuvaajan perusteella.

3. Yksinkertainen hakukone

Toteutimme yksinkertaisen hakukoneen hakukokeiluja varten. Käytimme hakuaineistoina PSB- ja ESB-tietokantoja. Kuvassa 8 on esitetty yksi haku ESB-tietokannasta. Käytimme samankaltaisuusmittana D2-kertymäfunktioita, joka estimoitiin 1 000 000 näytteen perusteella. Näytteet normalisoitiin otoskeskiarvolla, laitettiin 1 024 ämpäriin histogrammiin välillä $[0, 3]$, ja histogrammista laskettiin kumulatiivinen summa. D2-näytteen vaatimat satunnaiset pisteet muodostettiin aiemmin kuvatulla menetelmällä.

Hakukoneen samankaltaisuusmitta oli Minkowskin ℓ_1 -metriikka arvioiduille D2-kertymäfunktioille. Kone indeksoi mallit hakemalla ne kovalevyltä tiedostotyypin perusteella, laskemalla D2-kuvaajan jokaiselle löytämälleen mallille ja tallentamalla hakupolun malliin ja mallin D2-kuvaajan. Toteutus oli melko optimoimaton, mutta kahden tuhannen mallin indeksointi kesti silti vain noin puoli tuntia.

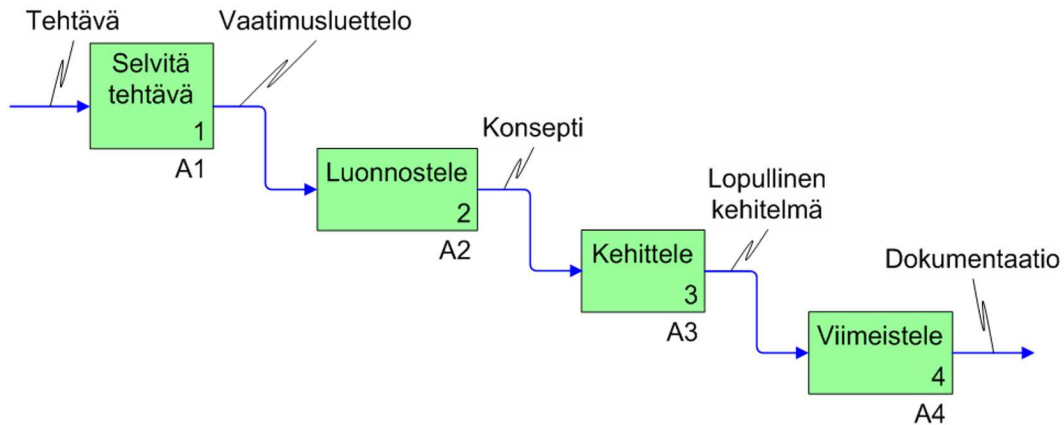
Hakua tehdessä käytimme yksinkertaista tyhjentävää hakua, jossa laskettiin haettavan mallin etäisyys kaikkiin muihin malleihin indeksissä olevien D2-kuvaajien perusteella ja palautettiin n lähintä mallia. Pienellä määrällä malleja tämä yksinkertainen hakumenetely on käytännössä reaaliaikainen. Hakukoneessa on yksinkertainen käyttöliittymä, jolla voi hakea malleja edellisten tulosten perusteella klikkaamalla mallia. Käyttäjä voi aloittaa uuden haun hakemalla ruudulle satunnaisia malleja tietokannasta.

4. Muodonhaun sovelluksia

Muodonhaulla tai oikeastaan muodon analyysillä, jota tarvitaan muodonhaun tekemiseen on useita merkittäviä sovelluksia. Funkhouser et al. (2005) esittävät melko kattavan listan:

- Rekisteröinti: Kaksi 3D-mallia sijoitetaan optimaalisesti päällekkäin, jotta voidaan verrata. Arkeologi voi haluta vertailla löydettyä ruukkua tunnettuihin.
- Täsmäys: Kahta mallia voidaan vertailla samankaltaisuuden osalta. Lääkäri voi haluta vertailla kasvaimen eri ajankohtina otettuja magneettikuvia.
- Haku: Voidaan hakea 3D-mallia jollain tietyllä kriteerillä. Esimerkiksi sisustus-suunnittelussa voidaan haluta tietyt mitat ja muita kriteereitä täyttävät mallit.
- Tunnistus: Tutkitaan, onko malli tietokannassa vai ei. Insinööritoimistossa voidaan tutkia, onko jokin tietty 3D-malli suunniteltu tai katalogoitu kahteen kertaan.
- Verifiointi: Tutkitaan, täyttääkö malli jonkin spesifikaation tietyllä toleranssilla laadunvalvonnassa.
- Ryvästys: Niputetaan mallit niiden samankaltaisuuden perusteella. Paleontologi voi käyttää tätä evoluutioprosessin tutkimiseen ja insinööritoimisto voi moduloida ja etsiä tuoteperheitä.
- Piirteentunnistus: Tunnistetaan malleista sovelluksen kannalta mielenkiintoisia piirteitä. CAD-mallista voidaan erottaa valmistuksen kannalta mielenkiintoiset piirteet, kuten reiät ja viisteet. Veistoksista voidaan erottaa taltan jäljet.
- Luokittelu: Luokitellaan tuntematon malli samankaltaisuuden perusteella tunnettuihin luokiteltuihin malleihin nähden. Uutta molekyyli-rakennetta voidaan verrata rakenteisiin, joiden ominaisuudet tunnetaan. Virtuaaliympäristöjä rakennettaessa uuden mallin merkitys voidaan päätellä automaattisesti; saadaan kone tunnistamaan että tuolin mallin on tuoli ja sillä voi istua.
- Segmentointi: Jaetaan malli eriytyviin osiin. Skannatulle ihmismallille voidaan jottaa automaattisesti luuranko, jonka avulla se voidaan animoida.
- Semanttinen merkintä: Merkitään mallin osat niiden merkityksen perusteella. Ihmisen mallista tunnustetaan automaattisesti esimerkiksi oikeaa kättä vastaava alue.
- Uuden syntetisointi: Tuotetaan uusia malleja analysoimalla vanhojen malleja ja varioimalla niiden osia.

Käsitlemme tässä tarkemmin CAD-suunniteluun liittyviä sovelluksia sekä tuotekehitys-prosessin että tuotetiedonhallinnan kannalta.



Kuva 9. Pahlin & Beitzin malli

4.1 Muodanhaku tuotekehitysprosessissa

Tuotekehityksessä suunnittelijat hakevat manuaalisesti aikaisemmista suunnitelmista osia ja kokoonpanoja välttääkseen samojen osien uudelleensuunnittelua. Tähän kuluu paljon aikaa eikä hakutulos ole aina edes hyvä. Tällä hetkellä haku perustuu mallin mukana kulkevaan tekstiin: osanumeroihin, mallin nimeen, mallin sijaintiin hierarkiassa ja mahdollisesti syötettyyn lisätietoon. On arvioitu, että 70–80% suunnitelluista osista on jo suunniteltu. Näin ollen olemassa olevan mallin, jo tehdyn suunnittelutyön, uudelleenkäytössä on potentiaalia tuotekehitysprosessin rationalisoimiseksi.

Muodonhaun hyödyntämistä yrityksissä voidaan tarkastella siitä näkökulmasta, miten geneerinen tuotekehitysprosessi etenee yrityksissä. Pahlin & Beitzin (2003) tuotekehitysoppi on metodiikka teknisten systeemien ja tuotteiden kehittämiseen ja konstruointiin. Pahlin & Beitzin mallia voidaan pitää kansainvälisesti kaikkein hyväksytyimpänä, ja se on vaikuttanut myös moniin amerikkalaisiin teoksiin aiheesta. Sitä voidaan soveltaa laajasti eri aloilla, esimerkiksi koneenrakennuksessa, hienomekaniikassa, sähköisten kytkentöjen suunnittelussa tai prosessisuunnittelussa.

Pahl & Beitz esittävät kehittelylle ja konstruoinnille etenemistavan, jossa idea konkretisoidaan lopulliseksi tuotteeksi neljässä perustavanlaatuisessa työaskeleessa. Nämä askeleet ovat: 1. Tehtävänasettelun selvitys ja täsmennys, 2. Luonnostelu, 3. Kehittely, 4. Viimeistely. (Kuva 9)

Tehtävänasettelussa kerätään tietoa vaatimuksista, jotka tuotteen tulisi täyttää, sekä reunaehdoista, jotka rajoittavat tavoitteeseen pääsemistä. Reunaehdoista ovat esimerkiksi yrityksessä vallitseva tilanne (konekanta, henkilöstö, olemassa olevat asiakkaat), markkinat (kilpailijoiden tuotteet, asiakkailta tulevat vaatimukset) ja ympäristö (talouspoliittiset tapahtumat, lainsäädännön muutokset). Työvaiheen tuloksena syntyy yksityiskohtainen vaatimusluettelo, joka ohjaa suunnittelua myöhemmissä työvaiheissa. Muodonhaun ei juurikaan voida hyödyntää, koska vaatimukset kuvataan tekstinä. Kilpailijoiden tuotteita voitaisiin vertailla, mutta 3D-mallien saaminen niistä on vaikeaa.

Luonnosteluvaiheessa pyritään tuotteen toiminta esittämään toimintoina, joille pyritään löytämään mahdollisimman monta erilaista periaatteellista ratkaisua. Kun jokaiseen toimintoon on innovoitu tarpeellinen määrä ratkaisuja, niistä voidaan yhdistellä esim. morfologisen taulukon avulla toistensa kanssa yhteensopivia kokonaisratkaisuja. Tässä vaiheessa muodonhakua voidaan hyödyntää esimerkiksi:

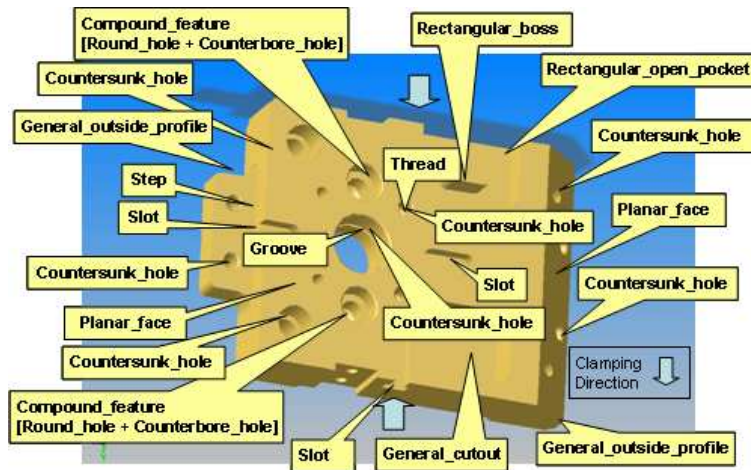
- Luonnostelemalla "karkeita" 3D-malleja ja hakea tietokannasta samantyyppisiä ratkaisuja, joissa komponentit on viimeistelty esim. valmistuksen kannalta. Suunnittelijan ei tarvitse mallintaa viisteitä, pyöristyksiä ja toleransseja.
- Ideointityökaluna, jolloin suunnittelija voi navigoida 3D-malliavaruudessa ja etsiä ratkaisua esim. porakoneen käsikahvan suunnitteluun. Muodonhaku algoritmi etsii samantyyppisiä muotoja, jotka voivat aikaansaada uudenlaisen näkemyksen ergonomiselle käyttöliittymälle.

Kehittelyvaiheessa suunnitellaan tuotteen lopullinen layout sekä kaikki tuotteessa tarvittavat osat ja komponentit edellisessä vaiheessa tehdyn ratkaisuehdotelman pohjalta. Vielä tässäkin vaiheessa voidaan tehdä erilaisia vaihtoehtoisia ratkaisuja parhaan mahdollisen lopputuloksen saavuttamiseksi. Kehittelyvaiheessa alkaa perinteisesti 3D-suunnittelu karkealla tasolla. Muodonhakua voidaan jo hyödyntää esimerkiksi:

- Yrityksen suunnittelutietokannassa olevien valmiiden komponenttien hakuun.
- Olemassa olevien simulointimallien hakuun ja hyödyntää niitä. Kehittelyvaiheessa tehdään jo alustavia, esimerkiksi FEM-pohjaisia, simulointeja. Simulointimallitkin perustuvat 3D-malliin, mutta 3D-mallit usein yksinkertaistetaan simulointeja varten. Muodonhauulla voidaan hakea olemassa olevia simulointimalleja ja hyödyntää niitä.

Viimeistelyvaiheessa luodaan tarkat mallit osista ja kokoonpanosta ja laaditaan erilaiset ohjeet ja muu dokumentaatio. Viimeistely vie tyypillisesti suurimman osan tuotekehitysprojektin ajasta. Airila et al. (1985) esittävät, että tuotekehityksessä käytetään tehtävän selvittelyyn 5 %, luonnosteluun 10 %, kehittelyyn 25 % ja viimeistelyyn 60 % ajasta. Viimeistelyvaiheen nopeuttamisella voidaan parhaiten tehostaa toimitusprosessia. Viimeistelyvaihe on detaljisuunnittelua, jossa komponenttien mitat ja muoto lyödään lukkoon, varmistetaan kokoonpantavuus ja optimoidaan valmistettavuus yrityksen tai sen alihankintaverkoston konekannan suhteen. Muodonhakua voidaan hyödyntää esimerkiksi:

- Hakemalla tietokannasta yrityksen käyttämiä nykyisiä komponentteja.
- Analysoimalla nykyisten komponenttien valmistuspiirteitä (Kuva 10), esim. reikäkokoja, ja käyttämällä samoja piirteitä, jolloin valmistusta voidaan optimoida.
- Kokoonpantavuuden optimointiin analysoimalla tietokannasta samantyyppisiä komponentteja. Parhaimmillaan voidaan hakea komponentille vastinkomponentti, joka sopii liityntäpintojen osalta yhteen.



Kuva 10. CAD-mallin piirretietoa.

4.2 Muodanhaku tuotetiedonhallinnassa

Yritysten liiketoiminta sisältää koko ajan enemmän ja laajempia tietomääriä. Tuotteet monimutkaistuvat ja niiden räätälöinti lisääntyy. Tuotetiedon määrä kasvaa nopeasti. Tuotetiedonhallintajärjestelmiin investoiminen on kasvanut vuosituhannen vaihteen jälkeen merkittävästi. Yritykset näkevätkin, että PLM-järjestelmiin investointi on tärkeää ja tuotavaa liiketoimintaa, josta seuraa suuria taloudellisia ja ajallisia säästöjä.

PLM pyrkii hallitsemaan tuotteeseen liittyvät tiedot ja suunnitteluprosessit ohjelmistokokonaisuuksien avulla. PLM-järjestelmää voi konkretisoida integroituna suunnitteluohjelmistoympäristönä, johon kuuluvat tuotteen suunnittelu, valmistuksensuunnittelu, tuotannon suunnittelu, logistiikka, huolto ja kunnossapito (Aalto 2004). Käytännössä PLM sisältää tietokannan, johon on tallennettu yrityksen tuotetieto. Muodanhakua voidaan hyödyntää PLM-järjestelmän kanssa mm.

- Komponenttien standardoinnilla: muodonhaun perusteella voidaan luokitella komponentteja tuoteperheisiin ja vähentää komponentteja
- Päällekkäisyyksien etsimisessä: voidaan löytää samanlaisia tai lähes samanlaisia komponentteja.
- Tarkistamalla metatietojen oikeellisuus: voidaan aloittaa metatiedoilla ja tarkentaa muodonhaulla
- Yritysverkostossa toimivalla alihankkijalla tai järjestelmätoimittajalla saattaa myös olla komponentteja, joita se toimittaa hiukan erilaisena usealle eri päämiehelle. Jos alihankkija kykenee sopimaan päämiestensä kanssa komponentin standardoimisesta, kaikki osapuolet hyötyvät.

5. Yhteenveto

Muodonhaun menetelmiä on suuri määrä, mutta kirjallisuuden perusteella yksikään niistä ei nouse parhaaksi, vaan kaikilla on omat hyvät ja huonot puolensa. Iyer et al. (2005) mukaan piirrektorit ovat yleensä tehokkaita haussa, mutta eivät käytännössä pysty erottelemaan intuitiivisesti erilaisia muotoja toisistaan. Topologiset graafeihin perustuvat menetelmät ovat liian raskaita laskettaviksi suurilla graafeilla, ja topologisiin luurankoihin perustuvat menetelmät eivät sovellu kaikille muodoille. 3D-muodontunnistukseen perustuvat menetelmät, joita emme käsitelleet, ovat laskennallisesti raskaita ja vaativat paljon tallennustilaa. Niitä ei myöskään ole testattu kunnolla monimutkaisilla muodoilla. Menetelmiä on pääosin kokeiltu laboratorio-olosuhteissa, joten niiden vieminen käytännön sovelluksiin vaatii varmasti jatkokehitystä.

3D-geometriaan perustuva informaation haku tehostaa tuntuvasti tuotekehitystä etenkin verkostossa. Yrityksen sisäisen ja verkoston sisäisen tehostamisen lisäksi se mahdollistaa myös aivan uudenlaisten palveluiden rakentamisen: Tulevaisuudessa voidaan hakea tarvittavan osan malli tai osan aihio Internetistä, ja saada mallin lisäksi mahdollisesti valmiiksi olemassa olevan valmistustahon tai -verkoston jo toteutuneet hintatiedot.

Nykyiset CAD-mallit eivät tue kovinkaan hyvin tiedon uudelleenkäyttöä, joka on keskeistä, kun tuotetta jatkokehitetään tai sen pohjalta suunnitellaan uutta tuotetta. Tärkeätä on välttää lähes samankaltaisten komponenttien uudelleenmallinnus, jolloin nopeutettaisiin huomattavasti toimitusprosessiin kuluva aikaa.

Yrityksen sisällä saavutetaan seuraavia etuja: lähes samanlaisten komponenttien uudelleensuunnittelu poistuu, nimikkeiden määrää saadaan vähennettyä, varastoarvoa saadaan pienennettyä, CAD-komponenttitietokannan ristikkäisajoilla on mahdollisuus löytää moduloitavia komponentteja.

Yli yritysrajojen Internetissä toimiva 3D-search toiminto mullistaisi CAD-mallinnuksen periaatteet. CAD-mallinnus muuttuisi Google-tyyppiseksi hakutoiminnoiksi, joko meta-tiedon avulla (esim. L-shape bar plastic) tai mallintamalla karkea muoto ja lähettämällä se "hakuparametriksi" ja tuloksena olisi tarkasti mallinnettuja muotoja esim. valmistustekniikan mukaan ryhmiteltyinä.

5.1 Jatkotutkimus

Kirjallisuudessa esiintyy useita edelleen avoimia ongelmia, joiden ratkaiseminen vaatii merkittäviä tutkimusponnistuksia.

Muodonhaun keskeinen ongelma on järkevän testipenkin määrittäminen. (Tangelder & Veltkamp 2004) Erityisesti tarvittaisiin sovellusalakohtaisia testipenkkejä. (Iyer et al. 2005) Samankaltaisuuden käsitteet vaihtelevat sovellusalalta toiselle, joten kaikkien hyväksymää testipenkkiä lienee mahdotonta tehdä. Nykyiset testipenkit sisältävät melko pienen määrän malleja, joten niillä on vaikeaa testata menetelmien skaalautuvuutta kym-

menien tai satojen tuhansien mallien tietokantoihin. Erityisen suuren ongelman aiheuttavat piirrevektoreiden indusoimat epäintuitiiviset samankaltaisuuden käsitteet. Epäintuitiivisuutta voi olla vaikeaa havaita pienillä tietokannoilla, joissa on useita saman luokan malleja.

Yksi mahdollisuus olisi käyttää useita luokitteluja ja tehdä mukautuva hakukone, joka opettelee luokittelut. Tällöin on mahdollista, että mukautuva hakukone oppii tunnistamaan pienen tietokannan täydellisesti, mutta ei osaa yleistää samankaltaisuutta uusiin malleihin. Tietyn saman tietokannan käyttäminen johtaa myös ns. tuning-ongelmaan, jossa tutkija virittää hakumenetelmän tietylle tietokannalle, eikä sen suorituskyky yleistyäkään. Ongelma on tunnettu tilastotieteessä, kun mahdollisia selittäviä tekijöitä on liian useita suhteessa havaintoihin. Ylisovittumisen välttämiseksi on käytettävä riittävän suuria aineistoja ja koneoppimisen ja tilastollisen mallinvalinnan menetelmiä, kuten ristiinvalidointia.

Muodon rekisteröinnissä kiertoinvarianssin saavuttaminen on edelleen avoin ongelma ja toisaalta kiertoinvarianttien mittojen ja parhaiden rekisteröintimenetelmien vertailua ei oikeastaan ole kunnolla tehty. (Tangelder & Veltkamp 2004)

Nykyinen tutkimus on keskittynyt muodon käyttöön haussa. Käytännössä 3D-malleilla on kuitenkin myös pintaan liittyvää tietoa, kuten väri ja tekstuuri. Pintainformaation käyttö hakumenetelmissä vaatii lisää tutkimusta. (Bustos et al. 2005)

Graafiesityksiin perustuvat menetelmät ovat sovellusalaltaan huomattavasti laajempia kuin piirrevektoreihin perustuvat, mutta graafiesitysten tehokas indeksointi ja erilaisten osa-osa-täsmäyksien tehokas toteutus laajoilla tietokannoilla on edelleen avoin ongelma. (Bustos et al. 2005, Tangelder & Veltkamp 2004)

Useiden hakumenetelmien järkevä yhdistäminen samaan hakukoneeseen on, ja tulee luultavasti pysymään, avoimena ongelmana vielä pitkään. Erityisen haasteellista on tehokas hakujen toteuttaminen silloin, kun samankaltaisuusmitta muuttuu, kuten relevanssipalautteen tapauksessa. Indeksointi muuttuvalla etäisyysmitalla vaatii paljon jatkotutkimusta ja se voi osoittautua käytännössä mahdottomaksi ellei samankaltaisuusmittaa pystytä rajoittamaan mielekkäällä tavalla.

Suurin osa esiteltyistä hakukoneista on rakennettu laboratorioympäristöön, mutta niiden hyödyllisyyttä todellisten ongelmien ratkaisussa ei ole vielä osoitettu. Käytännön sovelluksia ei myöskään ole juurikaan rakennettu. Erityisesti sovellusalueen tietämyksen integrointiin muodonhakuun tarvitaan lisää tutkimusta. Hakumenetelmät on saatava vielä integroitua yritysten tietojärjestelmiin ja tuotantoprosesseihin. (Iyer et al. 2005)

Konenäön alueella tietyssä kuvassa näkyvien objektien löytäminen suuresta tietokannasta on ollut avoin ongelma jo pitkään. 3D-skannauksen menetelmät, kuten laserskannaus tai fotogrammetrinen rekonstruktio, tuottavat rakenteettomia 3D-objekteja tai -ympäristöjä, joissa esineet näkyvät vain osittain. Jotta skannauksen tulosta voidaan käyttää sovellusten tekemiseen, täytyy usein pystyä erottelemaan siinä näkyvät objektit. Ympäristön täyd-

linen skannaaminen edellyttää, että jokainen pinnan piste näkyy jossakin ympäristöstä otetussa kuvassa. Tämä on käytännössä mahdoton vaatimus. Ongelma voidaan ratkaista ainakin osittain tunnistamalla skannatusta ympäristöstä objekteja tietokannan perusteella ja täydentämällä näkymättömiin jääneet pisteet tietokannan täydellisistä skannauksista. Monet esineet (esim. tuolit) esiintyvät ympäristössä moneen kertaan; tunnistamalla niiden samankaltaisuus voidaan täydellinen skannaus koota skannattuja paloja yhdistämällä.

Muodon haku- ja analyysimenetelmien avulla voidaan automatisoida asioita, joita pidetään yleisesti mahdottomina tai liian vaikeina automatisoida. Menetelmiä soveltamalla voidaan todennäköisesti sekä tehostaa vanhoja toimintatapoja että luoda täysin uusia toimintatapoja muotoa käsitteleville toimialoille.

Lähdeluettelo

- Aalto, H. (2004). Digital manufacturing — valmistuksensuunnitteluohjelmistot, *Metallitekniikka* 3.
- Airila, M., Karjalainen, J. A., Mantovaara, U., Nurmi, L., Ranta, A. & Verho, A. (eds) (1985). *Koneenosien suunnittelu 1. Perusteet.*, WSOY.
- Ankerst, M., Kastenmüller, G., Kriegel, H.-P. & Seidl, T. (1999). 3D shape histograms for similarity search and classification in spatial databases, in R. Güting, D. Papadias & F. Lochovsky (eds), *Advances in Spatial Databases, 6th International Symposium, SSD'99*, Vol. 1651, Springer, Hong Kong, China, s. 207–228.
- Bang, H. & Chen, T. (2002). Feature space warping: An approach to relevance feedback, *ICIP* .
- Beygelzimer, A., Kakade, S. & Langford, J. (2006). Cover trees for nearest neighbor, *ICML '06: Proceedings of the 23rd international conference on Machine learning*, ACM Press, New York, NY, USA, s. 97–104.
- Biasotti, S., Marini, S., Spagnuolo, M. & Falcidieno, B. (2006). Sub-part correspondence by structural descriptors of 3d shapes, *Computer-Aided design* 38: 1002–1019.
- Bustos, B., Keim, D. A., Saupe, D., Schreck, T. & Vranić, D. V. (2005). Feature-based similarity search in 3d object databases, *ACM Computing Surveys* 37(4): 345–387.
- Chávez, E., Navarro, G., Baeza-Yates, R. & Marroquín, J. L. (2001). Searching in metric spaces, *ACM Computing Surveys* 33(3): 273–321.
- Devroye, L. (1986). *Non-Uniform Random Variate Generation*, Springer-Verlag, New York.
- Dey, T., Edelsbrunner, H. & Guha, S. (1999). Computational topology, in B. Chazelle, J. E. Goodman & R. Pollack (eds), *Advances in Discrete and Computational Geometry*, Vol. 223 of *Contemporary mathematics*, American Mathematical Society, s. 109–143.
- Duda, R., Hart, P. & Stork, D. (2000). *Pattern Classification*, John Wiley & Sons, New York.
- Elad, M., Tal, A. & Ar, S. (2001). Content based retrieval of VRML objects — an iterative and interactive approach, *EG Multimedia* 39: 97–108.
- Fukunaga, K. (1990). *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, 2nd edn, Academic Press.
- Funkhouser, T., Kazhdan, M., Min, P. & Shilane, P. (2005). Shape-based retrieval and analysis of 3d models, *Communications of the ACM* 48(6): 58–64.
- Funkhouser, T., Min, P., Kazhdan, M., Chen, J., Halderman, A., Dobkin, D. & Jacobs, D. (2003). A search engine for 3d models, *ACM Transactions on Graphics* 22(1): 83–105.

- Gal, R., Shamir, A. & Cohen-Or, D. (2007). Pose-oblivious shape signature, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 13(2): 261–271.
- Gunn, T. G. (1982). The mechanization of design and manufacturing, *Scientific American* 247: 114–130.
- Hilaga, M., Shinagawa, Y., Kohmura, T. & Kunii, T. L. (2001). Topology matching for fully automatic similarity estimation of 3d shapes, *SIGGRAPH '01: Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, ACM Press, New York, NY, USA, s. 203–212.
- Horn, B. K. P. (1984). Extended gaussian images, *Proceedings of the IEEE* 72(12): 1671–1686.
- Iyer, N., Jayanti, S., Lou, K., Kalyanaraman, Y. & Ramani, K. (2005). Three-dimensional shape searching: state-of-the-art review and future trends, *Computer-Aided Design* 37: 509–530.
- Jayanti, S., Kalyanaraman, Y., Iyer, N. & Ramani, K. (2006). Developing an engineering shape benchmark for cad models, *Computer-Aided Design* 38: 939–953.
- Johnson, A. E. & Hebert, M. (1999). Using spin images for efficient object recognition in cluttered 3d scenes, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 21(5): 433–449.
- Kang, S. B. & Ikeuchi, K. (1991). Determining 3-D object pose using the Complex Extended Gaussian Image, *ICVPR*, Maui, HI, s. 580–585.
- Kazhdan, M., Funkhouser, T. & Rusinkiewicz, S. (2004). Shape matching and anisotropy, *ACM Transactions on Graphics* 23(3): 623–629.
- Leifman, G., Meir, R. & Tal, A. (2005). Semantic-oriented 3d shape retrieval using relevance feedback, *The Visual Computer* 21(8–10): 865–875.
- Osada, R., Funkhouser, T., Chazelle, B. & Dobkin, D. (2002). Shape distributions, *ACM Transactions of Graphics* 21(4): 807–832.
- Pahl, G. & Beitz, W. (2003). *Engineering Design. A systematic approach.*, 2nd edn, Springer-Verlag, London.
- Papadakis, P., Pratikakis, I., Perantonis, S. & Theoharis, T. (2007). Efficient 3d shape matching and retrieval using a concrete radialized spherical projection representation, *Pattern Recognition* 40(9): 2437–2452.
- Samet, H. (2006). *Foundations of Multidimensional and Metric Data Structures*, The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics and Geometric Modeling, Morgan-Kaufmann, San Francisco, CA, USA.
- Shih, J.-L., Lee, C.-H. & Wang, J. T. (2007). A new 3d model retrieval approach based on the elevation descriptor, *Pattern Recognition* 40: 283–295.

Shilane, P., Kazhdan, M., Min, P. & Funkhouser, T. (2004). The princeton shape benchmark, *Proceedings of the Shape Modeling International 2004 (SMI'04)*, IEEE Computer Society, s. 167–178.

Shinagawa, Y., Kunii, T. L. & Kergosien, Y. L. (1991). Surface coding based on morse theory, *IEEE Computer Graphics & Applications* 11(5): 66–78.

Siddiqi, K., Shokoufandeh, A., Dickinson, S. J. & Zucker, S. W. (1998). Shock graphs and shape matching, *ICCV*, s. 222–229.

Tangelder, J. W. H. & Veltkamp, R. C. (2004). A survey of content based 3d shape retrieval methods, *Proceedings of Shape Modeling Applications 2004*, s. 145–156.

Ullman, D. G. (1997). *The mechanical design process*, McGraw-Hill, New York.

Zhou, X. S. & Huang, T. S. (2001). Small sample learning during multimedia retrieval using biasmap, *Proceedings of IEEE Computer Vision and Pattern Recognition Conference, 2001*, Vol. 1, s. I–11 – I–17.

